THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR

DE

l'UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

ET

l'UNIVERSITÉ DE SAINT-ÉTIENNE

Spécialité
Équations aux Dérivées Partielles – Mathématiques Appliquées et Applications des Mathématiques

---

Sur quelques problèmes elliptiques de type de Kirchhoff et dynamique des fluides

---

par

AHMED BENSEDIK

soutenue le 7 juin 2012 devant le jury composé de:

Président:	Mohammed BOUGUIMA	Professeur, Tlemcen
Rapporteurs:	Youcef AMIRAT	Professeur, Clermont-Ferrand 2
	Mohammed BEKKAR	Professeur, Oran
Examinateur:	Laetitia PAOLI	Professeur, ICJ-Saint-Étienne
Directeurs de thèse:	Mohammed BOUCHEKIF	Professeur, Tlemcen
	Mahdi BOUKROUCHE	Professeur, ICJ-Saint-Étienne

Remerciements

L'aboutissement de cette thèse en cotutelle n'aurait jamais pu se réaliser sans l'appui de deux personnes que j'estime beaucoup. Permettez-moi donc les faire avancer en premier. Que le Professeur M. Bouchekif trouve ici ma profonde reconnaissance et mes respectueux remerciements pour le chemin qu'il m'a tracé en EDP ainsi que pour le sujet intéressant qu'il m'a proposé, pour son savoir, ses conseils et sa disponibilité au cours des années que j'ai passées au laboratoire des Systèmes Dynamiques et Applications à l'université de Tlemcen pour la réalisation de la première partie de ce travail. Ma profonde gratitude et mon grand respect s'adressent également au Professeur M. Boukrouche pour la gentillesse avec laquelle il m'avait accueilli pendant mon long séjour au laboratoire de Mathématiques de l'université de Saint-Étienne. Son soutien, sa confiance et surtout la maitrise de sa spécialité ont été éléments indispensables pour l'élaboration de la deuxième partie de cette thèse.
Je tiens aussi à remercier vivement, les professeurs Y. Amirat de l'université Clermont-Ferrand 2 et L. Paoli de l'ICJ - Saint-Étienne, qui ont accepté de faire partie du jury et d'avoir consacré de leur temps pour examiner mon travail. Mes sincères remerciements s'adressent aussi aux professeurs M. Bekkar de l'université d'Oran et M. Bouguima de l'université de Tlemcen qui ont pris, sans hésitation, la peine de lire et évaluer la présente thèse.

Introduction

La présente thèse, réalisée en cotutelle entre le laboratoire des Systèmes Dynamiques et Applications à l'université de Tlemcen et le laboratoire de Mathématiques de l'Université de Saint-Étienne, comprend deux parties indépendantes.

La première est consacrée à l'étude de quelques problèmes elliptiques non locaux dis de type Kirchhoff de la forme suivante

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)\Delta u = f(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière régulière $\partial\Omega$, f une fonction de Carathéodory et qui sera spécifiée ultérieurement et M est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}^+$à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$. Le problème (P) est appelé non local en raison de la présence du terme $M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)$ qui implique que l'équation n'est plus une identité ponctuelle. Cela provoque certaines difficultés mathématiques qui rendent l'étude d'un tel problème intéressante. Ce genre de problèmes ont des motivations physiques. En effet, l'opérateur de Kirchhoff $M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)\Delta u$ apparaît aussi dans l'équation des vibrations non linéaires, à savoir,

$$\begin{cases} u_{tt} - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)\Delta u = f(x,u) & \text{dans } \Omega\times(0,T) \\ \quad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times(0,T) & \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & x\in\Omega \end{cases}$$

Elle généralise au dimension supérieure l'équation initialement étudiée par Kirchhoff [6] [1],

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \left\{p_0 + p_1\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right\}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0<x<l, t>0,$$

représentant elle même une extension de l'équation de D'Alembert des ondes.

Citons à présent et sans détails, quelques phénomènes modélisés au biais de cette équation:

- Si $M = M\left(\int_\Omega |u|\,dx\right)$, le problème (P) peut-être rencontré, par exemple, en biologie dans la description (densité, concentration) de la population d'une bactérie.
- Si $M = M\left(\int_\Omega |u|^2\,dx\right)$, le problème (P) modélise la déformation des poutres en flexion.
- Si $M = M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)$, le problème (P) concerne par exemple les vibrations et les déformations des plaques ou des cordes tendues.

[1] Les numéros dans l'introduction renvoient à bibliographie à la fin de ce manuscrit.

Cette partie comprend trois chapitres.

1. **Bref aperçu sur l'équation de Kirchhoff:** On présente la déduction de l'équation de Kirchhoff sous sa forme la plus simple à partir du système d'équations "exactes" modélisant les vibrations libres d'une corde fixée en ses extrémités. Dans ce même chapitre, on rappelle quelques résultats intéressants établis dans un article dû à Chipot et al. [3], et qui sont repris par d'autres auteurs.

2. **Sur une équation elliptique de type de Kirchhoff avec un potentiel asymptotiquement linéaire à l'infini [Math. Comput. Modelling 49(2009) 1089-1096]:** L'objet de ce chapitre est l'étude du problème (P), c'est-à-dire établir les résultats d'existence de solutions positives dans le cas où f est une fonction asymptotiquement linéaire à l'infini par rapport à sa deuxième variable, et M une fonction continue, fortement positive sur $\mathbb{R}^+$, c-à-d, il existe $m_0 > 0$ tel que $m(t) \geq m_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.
Dans la plupart des travaux concernant le problème (P) on suppose que M est décroissante, notamment quand il s'agit d'une étude par la méthode variationnelle. L'intérêt de notre travail réside dans le fait que la fonction M est croissante, chose qui est, de point de vue physique, justifiée puisque dans le problème initialement abordé par Kirchhoff en 1876, M est une fonction affine croissante. En combinant la méthode variationnelle avec une méthode de troncature, des résultats d'existence dans le cas où M est croissante sont prouvés.

3. **Résultats d'existence et de non existence pour un problème elliptique de type de Kirchhoff avec un terme qui change de signe [Funkcialaj Ekvacioj 55(2012) 55-66]:** On considère le problème (P) avec $f(x,u) = |u|^{p-1}u + \lambda g(x)$, où g est une fonction qui change de signe et λ et p sont des paramètres réels positifs. En tenant compte de la monotonie de la fonction M et suivant les valeurs de l'exposant p des résultats d'existence ont été donnés. Plus exactement on a démontré les résultats suivants:

   Théorème 1. *Si M est fortement positive et la fonction g est de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$ alors*
   (i) pour $0 < p < 1$ le problème (P) admet une solution non triviale pour tout $\lambda > 0$.
   (ii) pour $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que le problème (P) admet une solution non triviale pour $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$.

   Dans le cas où la fonction f est sur-linéaire, g change de signe et M est non croissante des résultats d'existence et non existence ont été donnés:

   Théorème 2. *On suppose que la fonction g est de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$ et change de signe, $p > 1$ et M non croissante. On suppose de plus que la fonction $H(t) := tM(t^2)$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Alors il existe deux réels positifs λ_* et λ^*, $0 < \lambda_* < \lambda^*$ tels que le problème (P) admet au moins une solution positive pour $\lambda \in (0, \lambda_*)$ et aucune solution positive pour $\lambda > \lambda^*$.*

La preuve de ce théorème repose sur la méthode de sous et sur solutions et le principe du maximum.
L'objet du théorème suivant est l'étude d'une propriété qualitative de la solution obtenue.

Théorème 3. *Si la fonction g est comme dans le théorème précédent,* $0 < p < 1$ *et M est non décroissante, alors le problème (P) admet une solution à énergie négative.*

La deuxième partie de cette thèse, contient les chapitres 4 et 5. Elle est concernée par deux problèmes soulevés en dynamique des fluides.

4. **Propriétés de la solution d'un problème aux limites soulevé en dynamique des fluides [App. Math. Lett. 20(2007) 419-426]:** Il s'agit d'une généralisation, dans une certaine direction, d'un problème soulevé en dynamique des fluides par T. B. Benjamin [9], concernant une équation décrivant la propagation unidirectionnelle dispersive non linéaire des ondes. L'équation obtenue constitue un modèle approximatif pour les ondes longues dans un système à deux fluides. Le problème a été repris par Mays et Norbury [10], et plus tard par P. J. Torres [11] a étudié l'équation suivante

$$\begin{cases} -u'' + q^2 u = (1 + \sin x)\, u^2, & x \in]0, \pi[\\ u'(0) = u'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Cet auteur a déterminé l'ensemble des valeurs du paramètre q pour lesquelles la solution existe et a établi les propriétés de cette solution: positivité et symétrie. L'unicité est mentionnée "problème ouvert".
Ce chapitre consiste à prouver la positivité, l'unicité et la symétrie de la solution du problème suivant,

$$\begin{cases} -u'' + q^2 u = f(x)\, |u|^p, & x \in]a, b[\\ u'(a) = 0 = u'(b), \end{cases} \tag{P_p}$$

où $p > 1$ et f une fonction continue et symétrique sur $[a, b]$. Le résultat principal est le suivant:

Théorème 4. *Si la fonction f est continue, positive et symétrique sur $[a, b]$ et le paramètre q est tel que,*

$$p \frac{\alpha}{\beta} q^2 \left(1 + q^2 l^2\right)^{p-1} < q^2 + \min\left(1, \frac{\pi^2}{l^2}\right)$$

alors le problème (P_p) admet une solution positive unique et symétrique. Où l est la longueur de l'intervalle $[a, b]$ et α et β sont respectivement le minimum et le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$.

La démonstration se fait en trois étapes. On commence par démontrer l'existence d'au moins une solution positive en se servant d'un théorème de Krasnoselskii. Ensuite on établira la symétrie de cette solution et finalement on prouvera son unicité.

5. **Résultat d'existence pour un problème fortement couplé soumis à la loi de Tresca et contenant un terme de convection [J. Adv. Res. in Diff. Eq. 3(2011) 33-53]:** Ce chapitre a fait l'objet d'un problème décrivant le mouvement d'un fluide non newtonien incompressible et non isotherme, en prenant en compte un terme de convection. La nouveauté dans ce travail est que la viscosité du fluide ne dépend pas seulement de la vitesse mais aussi de la température et du module du tenseur des déformations. Explicitement on considère le problème suivant:

   Prouver l'existence de la vitesse v, la température θ et la pression π du fluide géré par les équations suivantes,

$$v.\nabla\theta = 2\mu\left(\theta, v, |D\left(v\right)|\right) D\left(v\right) : D\left(v\right) + div(K\nabla\theta) + r\left(\theta\right) \quad dans \quad \Omega,$$

$$div\left(v\right) = 0 \quad dans \quad \Omega,$$

$$-2div\left(\mu\left(\theta, v, |D(v)|\right) D(v)\right) + \nabla\pi = f \quad dans \quad \Omega.$$

   Le domaine Ω est donné par,

$$\Omega = \left\{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3; \quad x' \in \omega \quad et \quad 0 < x_3 < h\left(x'\right)\right\}.$$

   avec ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière lipschitzienne et h une fonction positive régulière bornée. La frontière de Ω est composée de trois parties, $\partial\Omega = \overline{\omega} \cup \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_L$, Γ_L est la surface latérale et Γ_1 est la surface supérieure du domaine du fluide. On complète le système par les conditions suivantes:

$$K\frac{\partial\theta}{\partial n} = \theta_\omega \quad sur \quad \omega, \qquad \theta = 0 \quad sur \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_L,$$

   où K est une fonction positive et θ_ω une température fixée.

$$v = g \quad sur \quad \Gamma_L, \qquad v = 0 \quad sur \quad \Gamma_1, \qquad v.n = 0 \quad sur \quad \omega,$$

   où n est la normale unitaire sortante de $\partial\Omega$. La composante tangentielle v_t de la vitesse v sur ω est inconnue et vérifie la loi de Tresca,

$$\begin{cases} |\sigma_t| = k \Rightarrow \exists\lambda \geq 0; v_t = s - \lambda\sigma_t, \\ |\sigma_t| < k \Rightarrow v_t = s, \end{cases}$$

   où s est la vitesse de cisaillement de la surface ω et σ_t est la composante tangentielle du vecteur σn, σ étant le tenseur des contraintes.

Après formulation faible du problème en une inéquation variationnelle, on a démontré en premier l'existence de la vitesse v en s'appuyant sur un théorème, dû à J.L Lions, sur les opérateurs monotones. Ensuite, en utilisant une version du théorème de De Rham [12] on a établi l'existence de la pression π. Finalement, en se basant sur le théorème de Lax-Milgram et celui du point fixe de Schauder, on démontre l'existence et l'unicité de la température, puis l'existence de la solution (v, θ, π) de l'inéquation variationnelle.

Dans l'annexe, on a rassemblé l'ensemble des théorèmes et définitions utilisés dans les différentes démonstrations des résultats rencontrés dans cette thèse.

Contents

Part I

Sur Quelques Problèmes Elliptiques de Type de Kirchhoff

Chapter 1

Bref aperçu sur l'équation de Kirchhoff

Ce chapitre introductif est consacré à un bref historique sur l'équation de Kirchhoff et de sa déduction selon Arosio [1]. On y donnera également quelques résultats intéressants établis par Chipot et al. dans [3].

1.1 Déduction de l'équation de Kirchhoff

1.1.1 Équation pour les vibrations libres d'une corde

Après le travail de Kirchhoff [4] de 1876, l'équation de Kirchhoff concernant les vibrations transversales libres d'une corde tendue, a été reprise par plusieurs auteurs dont entre autres, Carrier [2] and Narasimha [6]. En 1960 Oplinger [7] a fait une étude numérique tout en validant ses résultats par des essais expérimentaux.
Passons maintenant à la déduction de l'équation de Kirchhoff. Considérons une corde de longueur L, de densité constante supposée égale à 1 et décrite par une variable x prenant ses valeurs dans l'intervalle $[0, L]$. Notons par $u(x,t)$ et $v(x,t)$ les déplacements transversal et longitudinal du point matériel x à l'instant t. Le système des équations "exactes" modélisant les vibrations libres de la corde fixée en ses extrémités est donné par,

$$u_{tt} - (g(\lambda) u_x)_x = 0, \quad 0 < x < L, t > 0, \tag{1.1.1}$$

$$v_{tt} - (g(\lambda)(1 + v_x))_x = 0, \quad 0 < x < L, t > 0, \tag{1.1.2}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = v(0,t) = v(L,t) \quad t \geq 0. \tag{1.1.3}$$

Où λ désigne la déformation de la corde qui est donnée par

$$\lambda(x,t) = \left(|1 + v_x|^2 + |u_x|^2\right)^{1/2} - 1,$$

et $g(\lambda) = \dfrac{\sigma(\lambda)}{1+\lambda}$ avec $\sigma(\lambda)$ représentant la contrainte de la corde correspondant à la tension λ. La fonction σ est un paramètre caractérisant le matériau de la corde

cependant $\dfrac{1}{1+\lambda}$ est une correction géométrique.
L'objectif maintenant est de découpler l'inconnue u de v. Remarquons d'abord qu'en supposant $v \equiv 0$ on arrive, sous certaines conditions sur σ, à $|u_x| = cte$ le long de la corde. Mais ce résultat n'est valable que dans des cas exceptionnels, quand il s'agit, par exemple, d'un mouvement horizontal de la corde, cas où $u \equiv 0$. Écartons donc le cas où v est identiquement nulle. En supposant que u_x et v_x sont uniformément petits le long de la corde, le développement de Taylor appliqué à la fonction λ nous donne,

$$\lambda = v_x + \frac{|u_x|^2}{2} + o\left(|u_x|^2\right) \tag{1.1.4}$$

uniformément en x et t. En considérant les solutions pour lesquelles λ est indépendante de x, par intégration de (1.1.4) sous les conditions (1.1.3) on trouve

$$\begin{aligned} L\lambda(x,t) &= \int_0^L \left(v_x + \frac{|u_x|^2}{2} + o\left(|u_x|^2\right)\right) dx \\ &= \int_0^L \frac{|u_x|^2}{2} dx + o\left(\int_0^L |u_x|^2\, dx\right) \\ &\approx \frac{1}{2}\int_0^L |u_x|^2\, dx. \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Finalement en supposant la fonction $\sigma(\lambda)$ est approximativement linéaire au voisinage de $\lambda = 0$, de sorte que la loi de Hooke est applicable et

$$\sigma(\lambda) = T_0 + (T_0 + E)\lambda + o(\lambda),$$

où E désigne le module de Young calculé en position de repos.
En utilisant cette correction physique on obtient,

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \frac{T_0 + (T_0+E)\lambda + o(\lambda)}{1+\lambda} \\ &= T_0 + \frac{\lambda E + o(\lambda)}{1+\lambda} \\ &= T_0 + \lambda E + o(\lambda), \end{aligned}$$

car $\lambda \ll 1$. Ceci nous donne avec (1.1.5)

$$g(\lambda) \approx T_0 + \frac{E}{2L}\int_0^L |u_x|^2\, dx. \tag{1.1.6}$$

Si on remplace maintenant dans (1.1.1) on obtient l'équation simplifiée suivante dite de Kirchhoff

$$\begin{cases} u_{tt} - \left(T_0 + \dfrac{E}{2L}\displaystyle\int_0^L |u_x|^2\, dx\right) u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad t \geq 0. \end{cases} \tag{K}$$

On remarque ici que la fonction M est affine, $M(s) = T_0 + \dfrac{E}{2L}s$.

1.1.2 Équations pour d'autres phénomènes vibratoires

L'équation de Kirchhoff pour une poutre homogène de point de vue physique et géométrique, de densité 1 et d'épaisseur constante est donnée par

$$\begin{cases} u_{tt} - \left(T_0 + \dfrac{E}{2L}\displaystyle\int_0^L |u_x|^2\, dx\right) u_{xx} + ER^2 u_{xxxx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(L,t) = 0, \qquad t \geq 0, \end{cases}$$

où R désigne le rayon de giration.
Pour une plaque homogène extensible, l'équation est,

$$\begin{cases} u_{tt} - \left(\dfrac{E_0}{2|S|}\displaystyle\int_S |u_x|^2\, dx\right) \Delta_x u + E_0 h^2 \Delta_x^2 u = 0, \quad x \in S = \text{plaque}, \quad t > 0 \\ u(.,t) = \Delta_x u(.,t) = 0, \qquad \text{sur le bord de la plaque}, t \geq 0. \end{cases}$$

où E_0 est une caractéristique physique de la plaque et $h = \dfrac{\text{épaisseur}}{2\sqrt{3}}$.

1.2 Autour d'un problème non local

1.2.1 Introduction

Vu son importance, on reprend dans cette section une partie de l'article de Chipot et al. [3] notamment les résultats et les idées qui sont repris ensuite par d'autres auteurs comme [5] par exemple . Dans l'article [3], Chipot et al. ont considéré en plus d'un problème parabolique non linéaire non local le problème elliptique suivant:

Trouver u solution de

$$\begin{cases} -a\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right) \Delta u = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{Λ}$$

où Ω est ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ et $f \in L^2(\Omega)$ et a une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que

$$0 < m \leq a(s) \leq m', \qquad \forall s \in \mathbb{R}^+.$$

où m et m' sont deux constantes positives.

1.2.2 Résultat d'existence

Les solutions du problème (Λ) sont obtenues comme étant des minima ou points critiques de la fonctionnelle d'énergie E définie par,

$$E(u) = \frac{1}{2} A\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right) - (f, u)$$

où

$$A(s) = \int_0^s a(\xi) d\xi.$$

On a le théorème suivant,

Théorème 1.2.1. *La fonctionnelle E admet un minimum global dans $H_0^1(\Omega)$.*

Démonstration. La fonctionnelle E est coercive et bornée inférieurement. En effet de l'inégalité de Poincaré on a

$$|(f,u)| \leq |f|_2|u|_2 \leq |f|_2||\nabla u||_2,$$

avec $|v|_2$ désignant la norme de $v \in L^2(\Omega)$, d'où

$$E(u) = \frac{1}{2}A\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right) - (f,u) \geq \frac{m}{2}||\nabla u||_2^2 - c|f|_2||\nabla u||_2.$$

ainsi

$$\frac{E(u)}{||\nabla u||_2} \geq \frac{m}{2}||\nabla u||_2 - c|f|_2.$$

Ceci montre la coercivité de E.
De l'inégalité suivante,

$$\frac{m}{2}||\nabla u||_2^2 - c|f|_2||\nabla u||_2 \geq -\frac{c^2}{2m}|f|_2^2,$$

on en déduit que E est bornée inférieurement.
On termine la preuve par montrer que E est faiblement semi-continue inférieurement, ceci découle de la semi-continuité faible de la norme. Ainsi la fonctionnelle E admet un minimum global u_∞ dans $H_0^1(\Omega)$. □

1.2.3 Autres résultats

La fonctionnelle E peut avoir plusieurs minima. A noter que si u_∞ est un minimum local de E dans $H_0^1(\Omega)$ alors il est solution du problème (Λ). En effet, si u_∞ est un minimum local alors

$$\frac{d}{d\lambda}E(u_\infty + \lambda v)|_{\lambda=0} = 0, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

c-à-d

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{1}{2}\int_0^{||\nabla(u_\infty+\lambda v)||_2^2} a(s)ds - (f, u_\infty + \lambda v)\right]_{\lambda=0} = 0,$$

d'où

$$a\left(||\nabla(u_\infty)||_2^2\right)\int_\Omega \nabla u_\infty \nabla v dx - (f,v) = 0, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

u_∞ est un point stationnaire et solution de (Λ).
En regardant les point stationnaires on a le résultat suivant,

Théorème 1.2.2. *L'application $u \longmapsto l(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ est une bijection de l'ensemble des solutions faibles de (Λ) dans l'ensemble des solutions de l'équation en μ*

$$a^2(\mu)\mu = l(\varphi) := \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx \tag{1.2.1}$$

où φ est la solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = f & \textit{dans } \Omega \\ \varphi = 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

Démonstration. Soit u une solution de $(\varLambda)$, alors

$$a(l(u))u = \varphi \Rightarrow l\left(a(l(u))u\right) = l(\varphi) \Rightarrow a^2(l(u))l(u) = l(\varphi),$$

ainsi $l(u)$ est bien une solution de (1.2.1). Ceci montre que l applique l'ensemble des solutions de $(\varLambda)$ sur l'ensemble des solutions de (1.2.1).
Soit maintenant μ une solution de (1.2.1) et u une solution de

$$-a(\mu)\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

on a

$$a(\mu)u = \varphi \Rightarrow l\left(a(\mu)u\right) = l(\varphi) \Rightarrow a^2(\mu)l(u) = l(\varphi) = a^2(\mu)\mu \Rightarrow l(u) = \mu,$$

et u est une solution de $\varLambda$.
Finalement si $l(u_1) = l(u_2)$ alors $a\left(l(u_1)\right) = a\left(l(u_2)\right)$ et par suite $u_1 = u_2$. L'application l est donc une bijection. Ceci achève la démonstration du théorème. □

Remarque 1.2.1. *On voit suite à ce théorème que les points stationnaires sont déterminés par les solutions de l'équation*

$$a(\mu) = \sqrt{\frac{l(\varphi)}{\mu}}. \tag{1.2.3}$$

La fonction a peut être choisie de sorte que l'équation (1.2.3) admette une seule solution, des solutions multiples ou un continuum de solutions. Les points critiques ne sont pas tous des minima globaux comme le montre le théorème suivant.

Théorème 1.2.3. *(Comparaison d'énergies). Soit u_1 et u_2 deux solutions de $(\varLambda)$ correspondant aux solutions μ_1 et μ_2 de (1.2.3). On suppose que pour tout $\mu \in]\mu_1, \mu_2[$*

$$a(\mu) > \sqrt{\frac{l(\varphi)}{\mu}} \qquad \left(\textit{resp.} \quad a(\mu) < \sqrt{\frac{l(\varphi)}{\mu}}, \quad a(\mu) = \sqrt{\frac{l(\varphi)}{\mu}}\right) \tag{1.2.4}$$

alors

$$E(u_1) > E(u_2) \qquad \left(\textit{resp.} \quad E(u_1) < E(u_2), \quad E(u_1) = E(u_2)\right).$$

Démonstration. On rappelle que u_i avec i=1,2; est solution de l'équation

$$-a(\mu_i)\Delta u_i = f \quad \text{dans } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

c-à-d que l'on a

$$\mu_i = ||\nabla u_i||, \qquad u_i = \frac{\varphi}{a(\mu_i)}.$$

D'où

$$\begin{aligned} E(u_i) &= \frac{1}{2}\int_0^{\mu_i} a(s)ds - (f, u_i) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\mu_i} a(s)ds - \left(f, \frac{\varphi}{a(\mu_i)}\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\mu_i} a(s)ds - \frac{l(\varphi)}{a(\mu_i)} \end{aligned}$$

car $(f, \varphi) = (-\Delta\varphi, \varphi) = l(\varphi)$. En soustrayant on obtient

$$\begin{aligned} E(u_2) - E(u_1) &= \frac{1}{2}\int_{\mu_1}^{\mu_2} a(s)ds + \frac{l(\varphi)}{a(\mu_1)} - \frac{l(\varphi)}{a(\mu_2)} \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mu_1}^{\mu_2} a(s)ds + \sqrt{l(\varphi)\,\mu_1} - \sqrt{l(\varphi)\,\mu_2} \\ &> \frac{1}{2}\int_{\mu_1}^{\mu_2} \sqrt{\frac{l(\varphi)}{s}}ds + \sqrt{l(\varphi)\,\mu_1} - \sqrt{l(\varphi)\,\mu_2} = 0. \end{aligned}$$

D'où $E(u_2) > E(u_1)$. Les autres cas se traitent de la même manière. $\square$

Références

[1] A. Arosio, Averaged evolution equations. The Kirchhoff string and its treatment in scales of Banach spaces, proceedings of the 2nd workshop on functional-analytic methods in complex analysis, (Trieste, 1993), World Scientific, Singapore.

[2] G. F. Carrier, On the nonlinear vibration of the elastic string, Quart. Appl. Math. 3(1945) 157-165.

[3] M. Chipot, V. Valente, G. Vergara Caffarelli, Remarks on a nonlocal problem involving the Dirichlet energie, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 110(2003) 199-220.

[4] G. Kirchhoff, Mechanik, Teubner, Leipzig (1876).

[5] T. F. Ma, Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type, Nonlinear Analysis, 63(2005) 1967-1977.

[6] R. Narasimha, Nonlinear vibration of an elastic string, J. Sound Vibration 8(1968) 134-146.

[7] D. W. Oplinger, frequency response of a nonlinear stretched string, J. Acoustic Soc. Amer. 32(1960) 1529-1538.

Chapter 2

Sur une équation elliptique de type Kirchhoff avec un potentiel asymptotiquement linéaire à l'infini

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie l'existence de solutions positives du problème suivant

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\right) \Delta u = f(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière régulière $\partial\Omega$, $f(x,t)$ est une fonction continue sur $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, asymptotiquement linéaire à l'infini en t pour tout $x \in \Omega$, et M est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$.

En 1876, Kirchhoff [8] proposa ce type de problèmes comme étant une généralisation aux cordes vibrantes de l'équation classique des ondes de D'Alembert. Le modèle initialement étudié fût,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \left\{ p_0 + p_1 \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \right\} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, t > 0,$$

où p_0 dépend de la tension initiale, p_1 est une caractéristique du matériau du fil. $u(x,t)$ dénote le déplacement vertical du point x du fil à l'instant t. De tels problèmes sont souvent appelés non locaux car l'équation contient une intégrale sur Ω.

Après le fameux article de Lions [9], ce type de problèmes a attiré l'attention de plusieurs auteurs et depuis des dizaines d'articles sont tombés. On peut citer en particulier les travaux de Chipot [4, 5], Corrêa et al. [6] et leurs références.
Dans [6], et en se basant sur la méthode de Galerkin, les auteurs montrent l'existence de solutions positives dans le cas sous-linéaire $f(u) = u^\alpha$, $0 < \alpha < 1$.

Rappelons que dans le cas où f est à croissance super-linéaire, le problème (P) a été considéré par de nombreux chercheurs, on peut consulter à ce propos les articles [1, 2] et leurs références. Leur approche est basée essentiellement sur la condition d'Ambrosetti-Rabinowitz suivante,

$$\begin{array}{c} \textit{Il existe} \quad \mu > 2, \textit{et} \quad R_0 > 0 \quad \textit{tels que} \\ 0 < \mu F(x,u) \leq u f(x,u), \textit{pour tout } u, \quad |u| \geq R_0, x \in \Omega, \end{array} \tag{AR}$$

avec $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$.

Il est bien connu que (AR) est une condition technique importante pour l'application du Théorème de Passe Montagne. En effet cette condition implique que

$$\lim_{u \longrightarrow \infty} F(x,u)/u^2 = +\infty,$$

c'est-à-dire que $f(x,u)$ doit être super-linéaire par rapport à u à l'infini, ce qui n'est pas le cas pour notre travail. A noter que le cas $M = 1$ a été traité par Zhou dans [10], dans lequel il démontre l'existence de solutions positives en s'appuyant sur une variante du Théorème de Passe-Montagne.

Une question légitime se pose alors: Pour M non identiquement constante et $f(x,t)$ asymptotiquement linéaire à l'infini en t, peut-on assurer l'existence de solutions dans le cas où (AR) n'est pas satisfaite?
Le but du présent chapitre est d'apporter une réponse positive à cette question. Nous serons donc amenés à trouver des conditions suffisantes sur M et f pour lesquelles le problème (P) admette des solutions au sens faible.

On suppose que,

(M_0) *M est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que pour un certain $m_0 > 0$ on ait*

$$M(t) \geq m_0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

(M_1) *il existe $m_1 > 0$ et $t_0 > 0$ tels que*

$$M(t) = m_1 \quad \textit{pour} \quad t \geq t_0,$$

(f_1) *La fonction $(x,t) \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ et est telle que,*

$$f(x,t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0, x \in \overline{\Omega} \quad \textit{et} \quad f(x,t) = 0 \quad \forall t \leq 0, x \in \overline{\Omega};$$

(f_2) *la fonction $t \mapsto \dfrac{f(x,t)}{t}$ est non décroissante pour x fixé dans $\overline{\Omega}$,*

(f_3) $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} f(x,t)/t = p(x)$; $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} f(x,t)/t = q(x) \neq 0$ *uniformément en $x \in \Omega$, où $0 < \epsilon_0 \leq p(x), q(x) \in L^\infty(\Omega)$ et $|p|_\infty < m_0 \lambda_1$, λ_1 étant la première valeur propre de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ et ϵ_0 est un réel positif fixé.*

On sait d'après l'article de De Figueiredo [7], que la première valeur propre $\lambda_1(q)$ du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda q(x)\, u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P$_1$}$$

où q est une fonction continue et positive sur $\overline{\Omega}$, est positive. La fonction propre associée à $\lambda_1(q)$ est notée ϕ_1, $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$. On désigne par μ_1 et $\psi_1 \in H_0^1(\Omega)$ la première valeur propre et la fonction propre associée au problème

$$\begin{cases} -M\left(\|u\|^2\right) \Delta u = \lambda q(x)\, u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_M}$$

La fonctionnelle d'énergie correspondant au problème (P) est donnée par

$$I(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\|u\|^2\right) - \int_\Omega F(x,u)\, dx,$$

où $\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)\, ds$ et $F(x,u) = \int_0^u f(x,s) ds$.

Une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ est dite solution faible du problème (P) si

$$M\left(\|u\|^2\right) \int_\Omega \nabla u.\nabla \phi dx - \int_\Omega f(x,u)\, \phi dx = 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Notation. *Le long de ce chapitre, on notera par* $|.|_p$ *la norme de l'espace* L^p, $1 \leq p \leq \infty$*; et par* $\|.\|$ *celle de* $H_0^1(\Omega)$ *induite par le produit scalaire* $(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx$. *Une sous-suite d'une suite* (u_n) *sera notée de la même façon.*

Commençons par présenter les deux théorèmes suivants:

Théorème 2.1.1. *Supposons que (f$_1$) à (f$_3$) soient satisfaites et que la fonction* M *vérifie* (M_0) *et* (M_1)*. Alors*

1. Si $\mu_1 > 1$ *alors le problème* (P) *n'admet pas de solution.*

2. Si $m_1\lambda_1(q) < 1$*, alors le problème* (P) *a une solution positive.*

3. Si $\mu_1 = 1$ *et* $m_0\lambda_1(q) \geq 1$ *et si le problème* (P) *admet une solution positive* $u \in H_0^1(\Omega)$ *alors*

$$f(x,u) = \lambda_1(q)\, q(x)\, M\left(\|u\|^2\right) u \quad \textit{p.p. dans } \Omega.$$

Théorème 2.1.2. *On suppose que la fonction* M *est non décroissante et vérifie* (M_0)*. On suppose de plus que les hypothèses (f$_1$) et (f$_3$) sont satisfaites avec* $|p|_\infty > 0$*. Alors le problème* (P) *admet une solution positive.*

Ce chapitre est organisé comme suit. La section 2.2 est consacrée à la démonstration du Théorème 2.1.1 où la fonction M est supposée bornée, quant à la section 2.3, elle traitera le Théorème 2.1.2 concernant le cas où M est non décroissante.

2.2 La fonction M est bornée

La preuve du Théorème 2.1.1 est basée sur les résultats suivants. Commençons par une variante du théorème de Passe-Montagne.

Lemme 2.2.1. [3] *Soit E un espace de Banach réel et $J \in C^1(E,\mathbb{R})$ une fonctionnelle satisfaisant à la condition suivante*

$$\max\{J(0), J(u_1)\} \leq \alpha < \beta \leq \inf_{\|u\|_E=\rho} J(u),$$

où α, β et ρ sont des réels positifs et $u_1 \in E$ avec $\|u_1\|_E > \rho$. Soit $c \geq \beta$ caractérisé par

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{\tau\in[0,1]} J(\gamma(\tau)) \quad \text{avec } \Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_1\},$$

Γ étant l'ensemble des chemins continus joignant 0 à u_1. Alors il existe une suite (u_n) dans E telle que

$$J(u_n) \overset{n}{\to} c \geq \beta \text{ et } (1 + \|u_n\|_E)\|J'(u_n)\|_{E'} \overset{n}{\to} 0 \quad (E' \text{ dual de } E).$$

Nous aurons aussi besoin de la proposition suivante.

Proposition 2.2.1. *Sous les hypothèses du Théorème 2.1.1, si*

$$m_1\lambda_1(q) < 1, \tag{2.2.1}$$

alors la fonctionnelle I vérifie les conditions géométriques suivantes:
(i) Il existe $\rho, \alpha > 0$ tels que $I(u) \geq \alpha$ pour $\|u\| = \rho$.
(ii) Il existe $v \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\|v\| > \rho$ et $I(v) \leq 0$.

Démonstration. Des hypothèses (f_1) et (f_3) il s'ensuit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A = A(\varepsilon) \geq 0$ tel que pour tout $(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}$,

$$F(x,s) \leq \frac{1}{2}(|p|_\infty + \varepsilon)s^2 + As^{\gamma+1} \tag{2.2.2}$$

où $1 < \gamma < \infty$ si $N \in \{1,2\}$ et $1 < \gamma < \frac{N+2}{N-2}$ si $N \geq 3$.

Pour ε fixé dans l'intervalle $]0, m_0\lambda_1 - |p|_\infty[$, de (2.2.2) et de l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \int_\Omega F(x,u)\,dx \geq \frac{1}{2}m_0\|u\|^2 - \frac{1}{2}(|p|_\infty + \varepsilon)|u|_2^2 - A|u|_{\gamma+1}^{\gamma+1} \\ &\geq \frac{1}{2}\left(m_0 - \frac{|p|_\infty + \varepsilon}{\lambda_1}\right)\|u\|^2 - C\|u\|^{\gamma+1}. \end{aligned}$$

Puisque $\gamma > 1$, la condition (i) s'ensuit.

Pour le point (ii), on peut écrire que, pour t suffisamment grand

$$\begin{aligned}\widehat{M}(t) &= \int_0^t M(s)\,ds = \int_0^{t_0} M(s)\,ds + \int_{t_0}^t m_1 ds, \quad \text{pour tout } t \geq t_0 \\ &= \widehat{M}(t_0) - m_1 t_0 + m_1 t \\ &\leq m_2 + m_1 t, \quad \text{avec} \quad m_2 = \left|\widehat{M}(t_0) - m_1 t_0\right|.\end{aligned}$$

En utilisant le lemme de Fatou, on a

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} \frac{I(t\phi_1)}{t^2} &\leq \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{m_2}{t^2} + m_1 \|\phi_1\|^2\right) - \lim_{t\to+\infty} \int_\Omega \frac{F(x,t\phi_1)}{t^2}dx \\ &\leq \frac{1}{2} m_1 \|\phi_1\|^2 - \int_\Omega \lim_{t\to+\infty} \frac{F(x,t\phi_1)}{t^2\phi_1^2}\phi_1^2 dx \\ &= \frac{1}{2} m_1 \|\phi_1\|^2 - \frac{1}{2\lambda_1(q)} \|\phi_1\|^2,\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{I(t\phi_1)}{t^2} \leq \frac{1}{2}\left(m_1 - \frac{1}{\lambda_1(q)}\right)\|\phi_1\|^2 < 0,$$

car $m_1\lambda_1(q) < 1$. Ainsi il existe $t_1 > \max\left(t_0, \dfrac{\rho}{\|\phi_1\|}\right)$ tel que $I(t_1\phi_1) \leq 0$. En prenant $v = t_1\phi_1$ le point (ii) est établi.

□

Passons maintenant à la preuve du Théorème 2.1.1.

Démonstration du Théorème 2.1.1. Premier point: Si $\mu_1 > 1$ alors le problème (P) n'admet pas de solution. En effet, si $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution de (P), alors des hypothèses (f_1) à (f_3) on a

$$M\left(\|u\|^2\right)\|u\|^2 = \int_\Omega f(x,u)\,u dx \leq \int_\Omega q(x)\,u^2 dx,$$

d'où

$$\mu_1 = \inf_{u\in H_0^1(\Omega), u\neq 0} \frac{M\left(\|u\|^2\right)\|u\|^2}{\int_\Omega q(x)\,u^2 dx} \leq 1.$$

Deuxième point: Si $m_1\lambda_1(q) < 1$ la proposition 2.2.1 nous assure l'existence d'un $t_1 > \max\left(t_0, \dfrac{\rho}{\|\phi_1\|}\right)$ tel que $I(t_1\phi_1) < 0$.

On définit l'ensemble des chemins suivant,

$$\Gamma = \left\{\gamma \in C\left([0,1], H_0^1(\Omega)\right); \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = t_1\phi_1\right\} \text{ et } c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{\tau\in[0,1]} I(\gamma(\tau)).$$

Du lemme 2.2.1, il existe une suite $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ telle que

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\|u_n\|^2\right) - \int_\Omega F(x,u_n)\,dx = c + o(1), \tag{2.2.3}$$

et

$$(1+\|u_n\|)\left\|I'(u_n)\right\|_{H^{-1}(\Omega)} \overset{n}{\to} 0, \tag{2.2.4}$$

ceci implique que

$$(I'(u_n), u_n) = M\left(\|u_n\|^2\right)\|u_n\|^2 - \int_\Omega f(x,u_n)\, u_n dx = o(1). \tag{2.2.5}$$

Montrons que la suite (u_n) est bornée. Supposons au contraire que $\|u_n\| \to +\infty$ et posons

$$w_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}. \tag{2.2.6}$$

La suite (w_n) ainsi définie est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, il existe alors une sous-suite encore notée (w_n) telle que

$$\begin{array}{lll} w_n \rightharpoonup w & \text{faiblement dans} & H_0^1(\Omega), \\ w_n \to w & \text{fortement dans} & L^2(\Omega), \\ w_n \to w & \text{p.p. dans} & \Omega. \end{array}$$

La limite w est non identiquement nulle. En effet, supposons $w \equiv 0$. De (f_1) et (f_3) on en déduit qu'il existe $\theta > 0$ tel que

$$\left|\frac{f(x,t)}{t}\right| \leq \theta \quad \text{pour} \quad x \in \Omega \quad \text{et} \quad t \geq 0.$$

D'où de (2.2.5) et (2.2.6) il vient

$$m_0 \leq M\left(\|u_n\|^2\right) = \int_\Omega \frac{f(x,u_n^+)}{u_n^+} w_n^2 dx + o(1) \leq \theta \int_\Omega w_n^2 dx \to 0,$$

ce qui est faux puisque $m_0 > 0$. Ainsi $w \neq 0$.
Montrons maintenant que

$$u_n \to +\infty \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Puisque $\|u_n\| \to +\infty$ et $w_n \to w$ p.p. dans Ω, on en déduit que

$$u_n \to +\infty \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad \text{si } w > 0 \quad \text{p. p. dans } \Omega.$$

Il reste donc à établir que $w > 0$ p.p. dans Ω. Considérons, comme dans [10], la suite (p_n) définie par

$$p_n(x) = \begin{cases} f(x,u_n)\, u_n^{-1}/M\left(\|u_n\|^2\right) & \text{pour } x \in \Omega \text{ et } u_n(x) > 0; \\ 0 & \text{pour } x \in \Omega \text{ et } u_n(x) \leq 0. \end{cases}$$

Pour tout entier n et pour tout $x \in \Omega$ on a

$$0 \leq p_n(x) \leq \frac{\theta}{m_0},$$

il existe donc une sous-suite encore notée (p_n) telle que

$$p_n \rightharpoonup h \text{ faiblement dans } L^2(\Omega), \quad \text{avec } 0 \leq h \leq \frac{\theta}{m_0}.$$

De la convergence forte de (w_n) vers w dans $L^2(\Omega)$, on obtient

$$\int_\Omega p_n(x)\, w_n(x)\, \phi(x)\, dx = \int_\Omega p_n(x)\, w_n^+(x)\, \phi(x)\, dx \xrightarrow{n} \int_\Omega h(x)\, w^+(x)\, \phi(x)\, dx,\ \forall \phi \in L^2(\Omega),$$

d'où

$$p_n w_n \rightharpoonup h w^+ \text{ faiblement dans } L^2(\Omega). \tag{2.2.7}$$

D'autre part pour tout $\phi \in L^2(\Omega)$

$$\int_\Omega (\nabla w_n . \nabla \phi - p_n(x)\, w_n(x)\, \phi)\, dx = \frac{|\langle I'(u_n), \phi\rangle|}{\|u_n\|\, M\left(\|u_n\|^2\right)} \leq \frac{\|I'(u_n)\|_{H^{-1}(\Omega)}}{\|u_n\|\, M\left(\|u_n\|^2\right)} \|\phi\|.$$

Faisons tendre n vers $+\infty$ tout en utilisant (2.2.4), (2.2.7), le fait que $\|u_n\| \to +\infty$ et la convergence faible de (w_n) vers w dans $H_0^1(\Omega)$, on arrive à

$$\int_\Omega \left(\nabla w . \nabla \phi - h(x)\, w^+(x)\, \phi\right) dx = 0, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

En remplaçant ϕ par w^- dans cette égalité, on obtient $\|w^-\| = 0$ d'où

$$w = w^+ \geq 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Enfin par application du principe du maximum on aboutit à

$$w(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

d'où la conclusion

$$u_n \to +\infty \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Estimons à présent $I(u_n)$ pour n assez grand. Remarquons d'abord que, des hypothèses (M_1), (f_1), (f_3) et de (2.2.5), on a

$$m_1 \|u_n\|^2 - \int_\Omega q(x)\, u_n^2 dx \to o(1). \tag{2.2.8}$$

Rappelons que

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\|u_n\|^2\right) - \int_\Omega F(x, u_n)\, dx.$$

D'après le théorème de la moyenne, pour tout entier n, il existe $t_n \in \left[0, \|u_n\|^2\right]$ tel que,

$$\widehat{M}\left(\|u_n\|^2\right) = M(t_n)\, \|u_n\|^2. \tag{2.2.9}$$

Remarquons que

$$\begin{cases} M(t_n) = m_1 & \text{si} \quad t_n \geq t_0, \\ m_0 \leq M(t_n) \leq \max_{t \in [0, t_0]} M(t) & \text{si} \quad t_n \leq t_0. \end{cases}$$

Pour F on peut écrire

$$F(x,u_n)=F(x,A)+\int_A^{u_n} f(x,s)\,ds,$$

où A est un nombre réel suffisamment grand. En utilisant encore une fois (f_3) on obtient, pour n assez grand,

$$F(x,u_n)=F(x,A)+\frac{1}{2}q(x)\left(u_n^2-A^2\right)+o(1).$$

En portant dans l'expression de $I(u_n)$, il vient avec (2.2.8)

$$I(u_n)=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}q(x)A^2-F(x,A)\right)dx+\frac{1}{2}\left(M(t_n)-m_1\right)\|u_n\|^2+o(1). \quad (2.2.10)$$

Maintenant si à partir d'un certain rang n_0, $M(t_n)=m_1$; on choisit convenablement le réel A de sorte que l'intégrale dans (2.2.10) soit inférieure à $c/2$, on obtient

$$I(u_n)\le\frac{c}{2}.$$

Ce qui est en contradiction avec (2.2.3). Par contre si $M(t_n)-m_1\overset{n}{\to}a\in\mathbb{R}^*$, on arrive à

$$I(u_n)\overset{n}{\to}\pm\infty,$$

ce qui contredit aussi (2.2.3). Et si la suite $(M(t_n))$ n'admet pas de limite, ce sera encore une contradiction avec (2.2.3). La suite (u_n) est donc bornée dans $H_0^1(\Omega)$, et puisque Ω et M sont bornés et $f(x,u)$ est sous-critique (par rapport à u), de la compacité de l'injection de Sobolev et des résultats standards, il existe une sous-suite (u_n) qui converge fortement vers un point critique non trivial de I, solution du problème (P). Ceci achève la preuve du deuxième point.

Troisième point: il s'agit ici de montrer que si (P) admet une solution u, sous les conditions $\mu_1=1$ et $m_0\lambda_1(q)\ge 1$, alors

$$f(x,u)=\lambda_1(q)\,q(x)\,M\left(\|u\|^2\right)u, \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Supposons que $\mu_1=1$. De la définition de μ_1 on a

$$M\left(\|\psi_1\|^2\right)\int_\Omega\nabla\psi_1.\nabla v dx=\int_\Omega q(x)\,\psi_1 v dx, \quad \forall v\in H_0^1(\Omega). \quad (2.2.11)$$

Si u est une solution positive de (P), on a pour ψ_1

$$M\left(\|u\|^2\right)\int_\Omega\nabla u.\nabla\psi_1 dx=\int_\Omega f(x,u)\,\psi_1 dx. \quad (2.2.12)$$

Posons $u=v$ dans (2.2.11) on obtient,

$$M\left(\|\psi_1\|^2\right)\int_\Omega\nabla\psi_1.\nabla u dx=\int_\Omega q(x)\,\psi_1 u dx. \quad (2.2.13)$$

Maintenant de (2.2.12) et (2.2.13) on en déduit que

$$\int_\Omega \frac{f(x,u)}{M\left(\|u\|^2\right)}\psi_1 dx = \int_\Omega \frac{q(x)\,u}{M\left(\|\psi_1\|^2\right)}\psi_1 dx$$

c-à-d,

$$\int_\Omega \left(\frac{f(x,u)}{M\left(\|u\|^2\right)} - \frac{q(x)\,u}{M\left(\|\psi_1\|^2\right)}\right)\psi_1 dx = 0. \tag{2.2.14}$$

On a

$$\frac{f(x,u)}{M\left(\|u\|^2\right)} - \frac{q(x)\,u}{M\left(\|\psi_1\|^2\right)} \leq 0.$$

En effet, $\mu_1 = 1$ implique que

$$\frac{1}{M\left(\|\psi_1\|^2\right)} = \frac{\|\psi_1\|^2}{\int_\Omega q(x)\,\psi^2 dx} \geq \inf_{v\in H_0^1(\Omega),v\neq 0} \frac{M\left(\|v\|^2\right)\|v\|^2}{\int_\Omega q(x)\,v^2 dx} = \lambda_1(q),$$

d'où il résulte que $M\left(\|\psi_1\|^2\right)\lambda_1(q) \leq 1$, or $M\left(\|\psi_1\|^2\right)\lambda_1(q) \geq m_0\lambda_1(q) \geq 1$, ainsi

$$M\left(\|\psi_1\|^2\right)\lambda_1(q) = 1.$$

En utilisant cette information, on écrit

$$\frac{f(x,u)}{M\left(\|u\|^2\right)} - \frac{q(x)\,u}{M\left(\|\psi_1\|^2\right)} = \lambda_1(q)\left(\frac{f(x,u)}{\lambda_1(q)\,M\left(\|u\|^2\right)} - q(x)\,u\right),$$

et comme $\lambda_1(q)\,M\left(\|u\|^2\right) \geq \lambda_1(q)\,m_0 \geq 1$, on obtient

$$\frac{f(x,u)}{\lambda_1(q)\,M\left(\|u\|^2\right)} - q(x)\,u \leq f(x,u) - q(x)\,u \leq 0.$$

On a $\psi_1 > 0$ p.p. dans Ω, et de (2.2.14) on conclut que

$$f(x,u) = \frac{M\left(\|u\|^2\right)}{M\left(\|\psi_1\|^2\right)}q(x)\,u = \lambda_1(q)\,q(x)\,M\left(\|u\|^2\right)u, \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Ceci termine la preuve du 3^e point. □

2.3 La fonction M est non décroissante

Dans cette section on va traiter le problème dans le cas où la fonction M est non décroissante. Rappelons à ce niveau que la plupart des problèmes elliptiques de Kirchhoff étudiés supposent la fonction M non croissante, sinon des hypothèses plus restrictives sont imposées à M surtout quand il s'agit d'utiliser la méthode variationnelle. On peut consulter à ce propos le travail de Alves et al. [2]. Avant de démontrer le Théorème 2.1.2, on va établir la proposition suivante qui nous fournit une estimation à priori pour la solution de (P).

Proposition 2.3.1. *Supposons que les hypothèses (M_1), (f_1), (f_2) et (f_3) sont satisfaites avec $|p|_\infty > 0$. Si $|q|_\infty < m_1$, alors toute solution positive u de (P) est telle que*

$$\|u\| \leq \overline{C},$$

où $\overline{C}$ est une constante positive dépendant seulement de m_0, m_1, $|p|_\infty$, $|q|_\infty$ et t_0.

Démonstration. En posant $p_0 := \inf_{x\in\Omega} p(x)$, on obtient de ($f_2$) et ($f_3$)

$$F(x,u) \geq \frac{1}{2} p_0 |u|^2,$$

d'où $c_0 \geq c$, où c et c_0 sont les niveaux d'énergie respectifs des fonctionnelles I et I_0, avec

$$I_0(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\|u\|^2\right) - \frac{p_0}{2}\int_\Omega |u|^2 \, dx.$$

Soit u une solution positive de (P). On distingue deux cas:
Si $\|u\|^2 < t_0$, on prend $\overline{C} = \sqrt{t_0}$.
Si maintenant $\|u\|^2 \geq t_0$, alors de (f_3), on a

$$|p|_\infty < m_0\lambda_1,$$

et avec la définition de λ_1, on obtient

$$|u|_2^2 \leq \frac{m_0}{|p|_\infty} \|u\|^2. \tag{2.3.1}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} c_0 &\geq c = \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\|u\|^2\right) - \int_\Omega F(x,u)\, dx \\ &\geq \frac{1}{2} m_1 \|u\|^2 - \frac{1}{2} m_1 t_0 - \frac{1}{2} |q|_\infty |u|_2^2. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

En utilisant (2.3.1), on obtient à partir de (2.3.2)

$$(2c_0 + m_1 t_0)|p|_\infty \geq (m_1 |p|_\infty - m_0 |q|_\infty) \|u\|^2.$$

Comme $|q|_\infty < m_1$, et la constante m_0 peut être choisie inférieure ou égale à $|p|_\infty$ on arrive finalement à

$$\|u\|^2 \leq \frac{(2c_0 + m_1 t_0)|p|_\infty}{m_1 |p|_\infty - m_0 |q|_\infty},$$

c-à-d

$$\|u\| \leq \overline{C}$$

avec

$$\overline{C} = \sqrt{\frac{(2c_0 + m_1 t_0)|p|_\infty}{m_1 |p|_\infty - m_0 |q|_\infty}}. \tag{2.3.3}$$

A noter que $\overline{C} \geq \sqrt{t_0}$. □

Passons à présent à la démonstration du théorème 2.1.2. La démonstration est basée sur une troncature de la fonction M en une fonction M_k égale à M sur un intervalle $[0,k]$. On montrera ensuite que le problème tronqué admet une solution positive et on s'assurera que cette dernière est aussi solution du problème initial (P).

Démonstration du Théorème 2.1.2. La fonction M étant non décroissante, définissons alors le problème tronqué suivant:

$$\begin{cases} -M_k\left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx\right)\Delta u = f(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (P_k)$$

où la fonction M_k est définie comme suit,

$$M_k(t) = \begin{cases} M(t) & \text{si} & t \le k \\ at+b & \text{si} & k < t \le k+1 \\ \frac{\delta}{\lambda_1(q)} & \text{si} & t > k+1, \end{cases}$$

avec $k > 0$ un entier suffisamment grand,

$$a = \frac{\delta}{\lambda_1(q)} - M(k), \qquad b = (1+k)M(k) - \frac{\delta k}{\lambda_1(q)}.$$

et

$$0 < \delta < \min(1, \lambda_1(q)\, m_0).$$

On remarque que la fonction M_k satisfait l'hypothèse (M_1) avec $m_1 = \dfrac{\delta}{\lambda_1(q)}$ et la condition (2.2.1) de la proposition 2.2.1 est clairement vérifiée. Ainsi, d'après le théorème 2.1.1, le problème (P_k) admet une solution positive u_k.
Si cette solution est telle que $\|u_k\|^2 \le k$, alors elle est aussi solution du problème (P), et c'est fini. Analysons le cas $\|u_k\|^2 > k$. On a, c_0 et p_0 étant définis dans la démonstration de la proposition 3.2.1,

$$c_0 \ge \frac{1}{2}\widehat{M_k}\left(\|u_k\|^2\right) - \frac{p_0}{2}|u_k|_2^2,$$

car, par construction, $M(t) \ge M_k(t)$ pour tout $t \ge 0$.
D'où, à partir de (2.3.1)

$$c_0 \ge \frac{1}{2}\widehat{M_k}\left(\|u_k\|^2\right) - \frac{p_0}{2|p|_\infty} m_0 \|u_k\|^2.$$

Si $k < \|u_k\|^2 \le k+1$, on obtient

$$\begin{aligned} c_0 &\ge \frac{1}{2}\widehat{M}(k) - \frac{p_0}{2|p|_\infty} m_0 \|u_k\|^2 \\ &\ge \frac{1}{2} m_0 k - \frac{p_0}{2|p|_\infty} m_0 (k+1) \\ &= \frac{1}{2} m_0 k \left(1 - \frac{p_0}{|p|_\infty}\right) - \frac{p_0}{2|p|_\infty} m_0 \end{aligned}$$

Ce qui est impossible pour k assez grand, car $1 - \dfrac{p_0}{|p|_\infty} > 0$.
Et si $\|u_k\|^2 > k + 1$, on écrit

$$c_1 \geq \frac{1}{2}\widehat{M_k}\left(\|u_k\|^2\right) - \frac{p_1}{2}|u_k|_2^2, \tag{2.3.4}$$

où c_1 est le niveau d'énergie de la fonctionnelle I_1 définie par

$$I_1(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\|u\|^2\right) - \frac{p_1}{2}\int_\Omega |u|^2\, dx,$$

avec $0 < p_1 < \min\left(p_0, \dfrac{\delta |p|_\infty}{\lambda_1(q)}\right)$.
De (2.3.4) et de la définition de la fonction M_k on obtient

$$c_1 \geq \frac{1}{2}\widehat{M}(k) - \frac{p_1}{2|p|_\infty}\|u_k\|^2 + \frac{1}{4}(M(k) - m_1) + \frac{1}{2}m_1\left(\|u_k\|^2 - k\right),$$

d'où

$$c_1 \geq \frac{1}{2}(m_0 - m_1)k + \frac{1}{2}\left(m_1 - \frac{p_1}{|p|_\infty}\right)\|u_k\|^2 + \frac{1}{4}(M(k) - m_1). \tag{2.3.5}$$

Comme les coefficients $m_0 - m_1$ et $m_1 - \dfrac{p_1}{|p|_\infty}$ sont positifs l'inégalité (2.3.5) ne peut pas avoir lieu pour k assez grand. Ainsi $\|u_k\|^2 \leq k$ et u_k est solution du problème (P). $\square$

Références

[1] C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa, On the existence of solutions for a class of problem involving a nonlinear operator, Commun. Appl. Nonlinear Anal., 8 (2001) 43-56.

[2] C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa and T. F. Ma, Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type, Computers and mathematics with applications, 49 (2005) 85-93.

[3] G. Cerami, Un criterio di esistenza per i punti su varietà illimitate, Rend. Acad. Sci. Let. Ist. Lombardo, 112 (1978) 332-336.

[4] M. Chipot and B. Lovat, Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems, Nonlinear Anal., 30 (1997) 4619-4627.

[5] M. Chipot and J. F. Rodrigues, On a class of nonlocal nonlinear elliptic problems, RAIRO, Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, 26(1992) 447-467.

[6] F. J. S. A. Corrêa, S. D. B. Menezes and J. Ferreira, On a class of problems involving a nonlocal operator, Applied Mathematics and Computation, 147 (2004) 475-489.

[7] D. G. de Figueiredo, Positive solutions of semilinear elliptic problems, Lecture in Math., Springer-Verlag Berlin, 957(1982) 34-87.

[8] G. Kirchhoff, Mechanik, Teubner, Leipzig (1876).

[9] J. L. Lions, On some questions in boundary value problems of mathematical physics, Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations, North-Holland Math. Stud., North-Holland, Amsterdam, 30(1978) 284-346.

[10] H. S. Zhou, An application of a Mountain Pass theorem, Acta Mathematica Sinica, English Series, 18 (2002) 27-36.

Chapter 3

Résultats d'existence et de non existence pour un problème elliptique de type de Kirchhoff avec un terme qui change de signe

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'existence et la non existence de solutions pour le problème suivant:

$$\begin{cases} -M\left(\|u\|^2\right)\Delta u = |u|^{p-1}u + \lambda f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ $(N > 2)$ à frontière régulière $\partial\Omega$, $f \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ qui change de signe, M est une fonction continue et positive $\mathbb{R}^+$ et λ est un paramètre réel positif.

Le problème (P) représente l'homologue stationnaire de l'équation hyperbolique de Kirchhoff,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M\left(\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2\,dx\right)\Delta u = g(x,u), \tag{P'}$$

qui est motivée par la description mathématique des vibrations d'une corde élastique tendue.

L'équation (P') a été proposée par Kirchhoff [6] en 1876 avec $M(s) = as+b; a, b > 0$ et $\Omega = (0, L) \subset \mathbb{R}$ comme une extension de l'équation classique de D'Alembert des ondes. Le modèle étudié prend en compte les variations de la longueur de la corde produites par les vibrations transversales. Ces problèmes sont souvent appelés non locaux puisque l'équation n'est plus une identité ponctuelle en raison de la présence du terme $M\left(\|u\|^2\right)$. Ce type de problèmes a reçu beaucoup d'attention après que le travail de Lions [7], où le cadre fonctionnel a été proposé. En utilisant la méthode variationnelle Alves et al. [2] ont donné des conditions sur les fonctions M et g pour que le problème stationnaire correspondant à (P') possède des solutions positives dans le cas sous-critique. Corrêa et Menezes [4] ont prouvé un résultat d'existence pour $g(x,u) = g(x)$ en s'appuyant sur la méthode de Galerkin. Ils ont également remarqué que le problème admet une solution positive lorsque la fonction M est bornée et $g(x,u) = (u^+)^\alpha + \lambda\varphi(x)$, avec $0 < \alpha < 1$ et $\varphi > 0$.

Motivé par l'article de Ma [9], les article [1, 2, 4] et celui de Dai et Gu [5] pour $M \equiv 1$, on montre quelques résultats d'existence et de non existence de solutions positives pour le problème (P) . On verra que ces résultats dépendent des fonctions M et f qui change de signe, de l'exposant p et du paramètre λ.

Avant de donner les principaux résultats, on fait les hypothèses suivantes:
(M_0) *M est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que*

$$M(s) \geq m_0, \ \forall s \geq 0,$$

pour un certain $m_0 > 0$.
(f_1) *$f \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$,*
(f_2) *f change de signe sur $\overline{\Omega}$,*
(f_3) *le problème*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_f}$$

admet une solution non négative.

Pour l'existence de telles fonctions f, on se réfère à l'article [3], dans lequel Các et al. ont traité un problème plus général. On donne ici la version de leur Théorème 4 pour le problème (P_f).
Soit $G : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ la fonction de Green de l'opérateur $-\Delta$ avec les conditions de Dirichlet et posons pour $\epsilon > 0$

$$w_\epsilon(x) = \int_\Omega G(x,y)\left[f^+(y) - (1+\epsilon)f^-(y)\right]dy,$$

où $f^\pm(x) = max\,(\pm f(x), 0)$.

Theorem 3.1.1. [3] *Si les hypothèses (f_1) et (f_2) sont satisfaites, et s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $w_\epsilon(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$. Alors le problème (P_f) admet au moins une solution positive.*

Notation. *Au cours de ce chapitre, on dénote par $|.|_q$ la norme de $L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$; et par $\|.\|$ celle de $H_0^1(\Omega)$ induite par le produit scalaire $(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx$. La norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ est désignée par $\|.\|_n$ et $\langle .,. \rangle$ est son produit scalaire. La lettre C dénote une constante positive générique.*

Les résultats obtenus sont:

Theorem 3.1.2. *On suppose que (M_0) et (f_1) sont satisfaites alors*
(i) si $0 < p < 1$, le problème (P) admet une solution pour tout $\lambda > 0$,
(ii) si $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ alors il existe $\lambda_0 > 0$ tel que le problème (P) admet une solution pour $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$.

Theorem 3.1.3. *On suppose que les hypothèses* (f_1) *à* (f_3) *sont vérifiées,* $p > 1$ *et la fonction* M *est non croissante satisfaisant* (M_0)*. On suppose de plus que la fonction* $H(t) := tM(t^2)$ *est croissante sur* $\mathbb{R}$*. Alors il existe* λ_* *et* λ^**,* $0 < \lambda_* < \lambda^*$ *tels que le problème* (P) *admet au moins une solution positive pour* $\lambda \in (0, \lambda_*)$ *et aucune solution positive pour* $\lambda > \lambda^*$*.*

Theorem 3.1.4. *Si les hypothèses* (f_1) *et* (f_2) *sont satisfaites,* $0 < p < 1$ *et la fonction* M *est non décroissante satisfaisant* (M_0)*, alors le problème* (P) *admet une solution à énergie négative.*

Remarque 3.1.1. *A Noter que toute solution du problème* (P) *est non triviale.*

Ce chapitre est organisé comme suit: La section 3.2 est consacrée à la démonstration du Théorème 3.1.2. Dans la section 3.3 on montre l'existence de solutions positives dans le cas où la fonction M est non croissante et on donne un résultat de non existence. Dans la dernière section on traite le cas où la fonction M non décroissante.

3.2 Résultat d'existence par la méthode de Galerkin

Premièrement, par solution du problème (P) on entend toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que,

$$M\left(\|u\|^2\right)\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi dx - \int_\Omega (|u|^{p-1}u + \lambda f(x))\varphi dx = 0 \qquad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

La démonstration du Théorème 3.1.2 est basée sur la proposition suivante:

Proposition 3.2.1. [8] *Soit* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *une application continue et* $B_r(O)$ *la boule ouverte* $\mathbb{R}^n$ *centrée à l'origine et de rayon* r*. Si* $\langle F(x), x\rangle > 0$ *pour tout* $x \in \partial B_r(O)$*, alors il existe* $x_0 \in B_r(O)$ *tel que* $F(x_0) = 0$*.*

Démonstration du Théorème 3.1.2. Soit (e_k) une base orthonormale complète de $H_0^1(\Omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ considérons l'espace de dimension finie suivant

$$V_n = vect\{e_1, ..., e_n\}.$$

Alors $(V_n, \|.\|)$ est isométrique à $(\mathbb{R}^n, \|.\|_n)$ et pour tout $v = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$ on a $\|v\|^2 = \|\xi\|_n^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ où $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$. On peut donc faire l'identification

$$V_n \ni v = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Une fonction $u_n \in V_n$ est appelée solution approximative du problème (P) si

$$M\left(\|u_n\|^2\right)\int_\Omega \nabla u_n.\nabla e_k dx - \int_\Omega (|u_n|^{p-1}u_n + \lambda f(x))e_k dx = 0 \tag{3.2.1}$$

où $k = 1, ..., n$.
Définissons l'opérateur $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(u_n) = (F_1(u_n), ..., F_n(u_n))$ avec

$$F_k(u_n) = M\left(\|u_n\|^2\right)\int_\Omega \nabla u_n.\nabla e_k dx - \int_\Omega (|u_n|^{p-1}u_n + \lambda f(x))e_k dx, \qquad k = 1, ..., n.$$

En utilisant l'identification précédente, avec $u_n = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$, on écrit

$$F_k(u_n) = M\left(\|u_n\|^2\right)\xi_k - \int_\Omega |u_n|^{p-1} u_n e_k dx - \lambda \int_\Omega f(x)\, e_k dx,$$

et donc

$$\begin{aligned} \langle F(u_n), u_n\rangle &= M\left(\|u_n\|^2\right)\sum_1^n \xi_k^2 - \int_\Omega |u_n|^{p-1} u_n \left(\sum_1^n \xi_k e_k\right) dx - \lambda \int_\Omega f(x)\left(\sum_1^n \xi_k e_k\right) dx \\ &= M\left(\|u_n\|^2\right)\|u_n\|^2 - \int_\Omega |u_n|^{p+1} dx - \lambda \int_\Omega f(x)\, u_n dx. \end{aligned}$$

De (M_0) , (f_1) et l'injection de Sobolev, on obtient

$$\begin{aligned} \langle F(u_n), u_n\rangle &\geq m_0 \|u_n\|^2 - C\|u_n\|^{p+1} - \lambda C |f|_2 \|u_n\| \\ &\geq (m_0\|u_n\| - C\|u_n\|^p - \lambda C |f|_2)\|u_n\|. \end{aligned}$$

En comparant les courbes C_1 et C_2 définies respectivement par $y = m_0^{-1}Ct^p$ et $y = t - m_0^{-1}\lambda C |f|_2$ on en déduit que:
(i) Si $0 < p < 1$ alors pour les grandes valeurs de $t = \|u\|$, la droite C_2 est au-dessus de C_1 pour tout $\lambda > 0$.
(ii) Si $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ alors pour les petites valeurs de $\|u\|$, C_2 est au-dessus de C_1 jusqu'à une valeur limite $\lambda_0 > 0$.
D'où, dans les deux cas, il existe $r = r(\lambda) > 0$ tel que $\langle F(u_n), u_n\rangle > 0$ pour $\|u_n\| = r$.
D'après la Proposition 3.2.1, il existe $u_n \in V_n$, solution approximative du problème (P) avec $\|u_n\| < r$. La suite obtenue (u_n) est bornée, d'où en passant à une sous-suite si nécessaire, il existe $\gamma > 0$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ tels que

$$\begin{aligned} \|u_n\| &\to \gamma \text{ dans } \mathbb{R} \\ u_n &\rightharpoonup u \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Fixons k dans (3.2.1) et faisons tendre n vers ∞, on obtient

$$M\left(\gamma^2\right)\int_\Omega \nabla u.\nabla e_k dx - \int_\Omega (|u|^{p-1}u + \lambda f(x))e_k dx = 0,$$

et puisque (e_k) est une base de $H_0^1(\Omega)$

$$M\left(\gamma^2\right)\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi dx - \int_\Omega (|u|^{p-1}u + \lambda f(x))\varphi dx = 0, \qquad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega),$$

en particulier pour $\varphi = u$ il vient

$$M\left(\gamma^2\right)\|u\|^2 - \int_\Omega \left(|u|^{p+1} + \lambda f(x)u\right)dx = 0. \tag{3.2.2}$$

De façon similaire, de (3.2.1) on a

$$M\left(\|u_n\|^2\right)\int_\Omega \nabla u_n.\nabla\varphi dx - \int_\Omega (|u_n|^{p-1}u_n + \lambda f(x))\varphi dx = 0, \qquad \forall\varphi \in V_n$$

pour $\varphi = u_n$ on obtient

$$M\left(\|u_n\|^2\right)\|u_n\|^2 - \int_\Omega \left(|u_n|^{p+1} + \lambda f(x)u_n\right)dx = 0,$$

en faisant tendre n vers ∞ et en utilisant l'injection compacte $H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ on arrive à

$$M\left(\gamma^2\right)\gamma^2 - \int_\Omega \left(|u|^{p+1} + \lambda f(x)u\right)dx = 0. \tag{3.2.3}$$

De (3.2.2) et (3.2.3) on a $\gamma = \|u\|$ et donc $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$. □

Remarque 3.2.1. *On voit, de cette démonstration qu'il est suffisant de prendre $f \in H^{-1}(\Omega)$ à la place (f_1), où $H^{-1}(\Omega)$ est l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.*

3.3 Démonstration du Théorème 3.1.3

Dans cette section on suppose que $p > 1$ et que la fonction M est non croissante vérifiant (M_0). Nous allons utiliser la méthode de sous et sur-solution. Soit u_f une solution non négative du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

l'existence de la solution u_f s'ensuit de (f_3). On détermine une sous-solution de (P) sous la forme

$$\underline{u} = \gamma u_f, \quad \text{with } \gamma \in \mathbb{R}^+.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} -M\left(\|\underline{u}\|^2\right)\Delta\underline{u} &= -M\left(\gamma^2\|u_f\|^2\right)\gamma\Delta u_f \\ &= M\left(\gamma^2\|u_f\|^2\right)\gamma f(x). \end{aligned}$$

$\underline{u}$ est une sous-solution de (P) si

$$-M\left(\|\underline{u}\|^2\right)\Delta\underline{u} \le |\underline{u}|^{p-1}\underline{u} + \lambda f(x).$$

Pour obtenir la dernière inégalité on doit prendre γ tel que

$$M\left(\gamma^2 \|u_f\|^2\right)\frac{\gamma}{\lambda} = 1, \tag{3.3.1}$$

car la fonction f change de signe. Montrons alors que l'équation (3.3.1) admet au moins une solution positive γ.
Posons $s = \gamma^2 \|u_f\|^2$, alors (3.3.1) devient

$$\psi(s) := \frac{M(s)\sqrt{s}}{\|u_f\|} = \lambda.$$

On a $\psi(0) = 0$ et $\lim\limits_{s\to+\infty}\psi(s) = +\infty$, et comme ψ est continue sur $\mathbb{R}^+$ il existe $s(\lambda) > 0$ tel que $\psi(s) = \lambda$. Ainsi il existe $\gamma > 0$ satisfaisant (3.3.1), et l'existence de $\underline{u}$ s'ensuit.

Cherchons maintenant une sur-solution $\overline{u}$ de (P) telle que $\overline{u}(x) \geq \underline{u}(x)$, $x \in \Omega$.
Soit e l'unique solution positive du problème de Dirichlet suivant,

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Posons

$$\overline{u} = Ae, \text{ avec } A \in \mathbb{R}^+.$$

De (M_0) on a

$$-M\left(\|\overline{u}\|^2\right)\Delta\overline{u} = M\left(A^2\|e\|^2\right)A \geq m_0 A.$$

Si le nombre positif A vérifie la condition suivante,

$$m_0 A \geq A^p |e|_\infty^p + \lambda |f|_\infty,$$

alors $\overline{u}$ fournit une sur-solution de (P). Pour monter l'existence d'un tel réel A, considérons la fonction h définie par,

$$h(A) = \left(m_0 A - A^p |e|_\infty^p\right)|f|_\infty^{-1}.$$

Un calcul simple montre que h est concave et atteint son maximum en

$$A_0 = \left(\frac{m_0}{p\,|e|_\infty^p}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

D'où si $0 < \lambda < \lambda_0 = h(A_0)$ alors $\overline{u} = A_0 e$ est une sur-solution du problème (P) car

$$-M\left(\|\overline{u}\|^2\right)\Delta\overline{u} \geq m_0 A_0 \geq |\overline{u}|_\infty^p + \lambda|f|_\infty \geq |\overline{u}|^{p-1}\overline{u} + \lambda f(x).$$

Et un choix adéquat de $0 < \lambda < \lambda_* \leq \lambda_0$ et donc de γ nous assure que

$$\overline{u}(x) \geq \underline{u}(x), \quad x \in \Omega.$$

Pour compléter la démonstration nous aurons besoin du lemme suivant:

Lemme 3.3.1. [1] *Sous les hypothèses du Théorème 3.1.3, si v et w sont des fonctions non négatives vérifiant*

$$\begin{cases} -M\left(\|w\|^2\right)\Delta w \geq -M\left(\|v\|^2\right)\Delta v & \textit{dans } \Omega \\ v = w = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P$_1$}$$

alors

$$w \geq v \quad \textit{dans} \quad \Omega.$$

Démonstration . On reprend l'idée de [1]. Multiplions les deux membres de l'inégalité par v et w et intégrons, on obtient

$$\frac{M\left(\|w\|^2\right)\|w\|^2}{M\left(\|v\|^2\right)} \geq (w,v) \geq \frac{M\left(\|v\|^2\right)\|v\|^2}{M\left(\|w\|^2\right)}$$

d'où

$$M\left(\|w\|^2\right)\|w\| \geq M\left(\|v\|^2\right)\|v\|$$

i.e.

$$H\left(\|w\|\right) \geq H\left(\|v\|\right).$$

Puisque la fonction H est croissante on obtient $\|w\| \geq \|v\|$ et donc

$$M\left(\|w\|^2\right) \leq M\left(\|v\|^2\right), \tag{3.3.2}$$

car la fonction M est non croissante. D'autre part, par application du principe du maximum au problème (P_1) nous obtenons

$$M\left(\|w\|^2\right)w \geq M\left(\|v\|^2\right)v.$$

Ceci avec (3.3.2) implique que $w \geq v$ dans Ω. Le lemme est démontré. □

Remarque 3.3.1. *Voici un exemple de fonction M satisfaisant les hypothèses du Théorème 3.1.3. On prend*

$$M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ M(t) = \frac{at+b}{\alpha t+\beta} + c,$$

où a, b, α, β et c sont des nombres positifs tels que

$$a\beta - b\alpha < 0 \quad \textit{et} \quad \frac{a+\alpha c}{b+\beta c} > \frac{1}{4}.$$

Maintenant pour obtenir une solution du problème (P) on définit la suite $(u_n)_{n\geq 0} \subset H_0^1(\Omega)$ par $u_0 = \overline{u}$ et u_n $(n \geq 1)$ est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -M\left(\|u_n\|^2\right)\Delta u_n = g(x, u_{n-1}) & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P$_2$}$$

où, pour simplifier on a posé $g(x,t) = |t|^{p-1}t + \lambda f(x)$.

Le problème (P_2) est M-linéaire en ce sens que si $u_{n-1} \in H_0^1(\Omega)$ est donné, le membre de droite est indépendant de u_n. Alors puisque $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $g(.,u_{n-1}) \in L^2(\Omega)$, on en déduit d'un résultat dans [1] que le problème (P_2) admet une unique solution $u_n \in H_0^1(\Omega)$. En utilisant le fait u_0 est une sur-solution on écrit

$$-M\left(\|u_0\|^2\right)\Delta u_0 \geq g(x,u_0) = -M\left(\|u_1\|^2\right)\Delta u_1,$$

et d'après le lemme 3.3.1, $u_0 \geq u_1$.
Et puisque $u_0 \geq \underline{u} \geq 0$ on a

$$-M\left(\|u_1\|^2\right)\Delta u_1 = g(x,u_0) \geq g(x,\underline{u}) \geq -M\left(\|\underline{u}\|^2\right)\Delta \underline{u},$$

de ceci, et encore une fois d'après le lemme 3.3.1, $u_1 \geq \underline{u}$.
Pour u_2 on écrit

$$-M\left(\|u_1\|^2\right)\Delta u_1 = g(x,u_0) \geq g(x,u_1) = -M\left(\|u_2\|^2\right)\Delta u_2,$$

et donc $u_1 \geq u_2$. De manière similaire $u_2 \geq \underline{u}$ car

$$-M\left(\|u_2\|^2\right)\Delta u_2 = g(x,u_1) \geq g(x,\underline{u}) \geq -M\left(\|\underline{u}\|^2\right)\Delta \underline{u}.$$

En répétant cet argument on obtient une suite monotone bornée $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$,

$$\overline{u} = u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq ... \geq u_n \geq ... \geq \underline{u} \geq 0, \quad \underline{u} \neq 0.$$

En utilisant les arguments de bootstrap on montre que $(u_n) \subset C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $0 < \alpha < 1$, et comme $f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ on a $g(.,u_n) \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. Les estimations de Schauder nous donnent $(u_n) \subset C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. Multiplions à présent (P_2) par u_n et intégrons en utilisant l'inégalité de Hölder et l'injection de Sobolev, nous obtenons

$$H(\|u_n\|) \leq C.$$

Le fait que $H(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$, implique que (u_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et par suite bornée dans $C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ qui s'injecte, avec injection compacte, dans $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Ainsi (u_n) contient une sous-suite qui converge dans $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ vers une limite u telle que $u \geq \underline{u} \geq 0$. Étant monotone, (u_n) converge elle même vers u. Faisons tendre n vers ∞ dans (P_2), nous en déduisons que u est une solution positive du problème (P). Ceci termine la preuve du résultat d'existence pour $0 < \lambda < \lambda_*$.

En ce qui concerne le résultat de non existence du Théorème 3.1.3, soit λ_1 la première valeur propre de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ et ϕ_1 la fonction propre associée. Si u_λ est une solution positive du problème (P) alors

$$-M\left(\|u_\lambda\|^2\right)\int_\Omega \phi_1 \Delta u_\lambda dx = \int_\Omega u_\lambda^p \phi_1 dx + \lambda \int_\Omega f(x)\,\phi_1 dx,$$

d'où

$$\lambda \int_\Omega f(x)\,\phi_1 dx = \int_\Omega \left[\lambda_1 M\left(\|u_\lambda\|^2\right) u_\lambda - u_\lambda^p\right]\phi_1 dx.$$

La fonction M étant non croissante, alors

$$\lambda \int_\Omega f(x)\,\phi_1 dx \leq \int_\Omega \left[\lambda_1 M(0)\,u_\lambda - u_\lambda^p\right]\phi_1 dx.$$

Le maximum de la fonction $u_\lambda \mapsto \lambda_1 M(0)\,u_\lambda - u_\lambda^p$ est atteint en $u_\lambda = \left(\frac{\lambda_1 M(0)}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}$.
En conséquence

$$\lambda \int_\Omega f(x)\,\phi_1 dx \leq \left(\frac{\lambda_1 M(0)}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}} (p-1) \int_\Omega \phi_1 dx. \tag{3.3.3}$$

Rappelons que, d'après la condition (f_3), le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

a une solution non négative $u_f \in H_0^1(\Omega)$ d'où

$$\int_\Omega f(x)\,\phi_1 dx = \int_\Omega -\Delta u_f \phi_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega u_f \phi_1 dx > 0.$$

De cette dernière inégalité et de (3.3.3) on obtient

$$\lambda \leq \frac{\left(\frac{\lambda_1 M(0)}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}} (p-1) \int_\Omega \phi_1 dx}{\int_\Omega f(x)\,\phi_1 dx} = \lambda^*.$$

Ceci implique que le problème (P) n'admet pas de solution positive pour $\lambda > \lambda^*$.

3.4 Démonstration du Théorème 3.1.4

Dans cette section on suppose que la fonction M est croissante, satisfait (M_0) et $0 < p < 1$. On cherche les solutions qui sont des points critiques de la fonctionnelle d'énergie I associée au problème (P), définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$I(u) = \frac{1}{2}\widetilde{M}(\|u\|^2) - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1} dx - \lambda \int_\Omega f(x) u dx,$$

où $\widetilde{M}(t) = \int_0^t M(s)ds$.
De la condition (M_0), l'inégalité de Hölder et l'injection de Sobolev on a

$$I(u) \geq \frac{1}{2} m_0 \|u\|^2 - \frac{C}{p+1}\|u\|^{p+1} - \lambda C \|u\| \, |f|_2 .$$

Puisque $1 < p+1 < 2$, la fonctionnelle I est coercive.
Soit $\alpha = \inf\limits_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u)$ et (u_n) une suite minimisante c-à-d vérifiant $I(u_n) \to \alpha$.

De la coercivité de I, la suite (u_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, on peut donc supposer que $u_n \rightharpoonup v$ faiblement, pour un certain $v \in H_0^1(\Omega)$. La fonction M est positive, d'où $\widetilde{M}$ est croissante et comme $\|v\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|$, on écrit

$$\widetilde{M}(\|v\|^2) \leq \widetilde{M}\left(\left(\liminf_{n\to\infty} \|u_n\|\right)^2\right).$$

La fonction $\widetilde{M}$ étant continue et $\|u_n\| \geq 0$ d'où

$$\widetilde{M}\left(\left(\liminf_{n\to\infty} \|u_n\|\right)^2\right) = \widetilde{M}\left(\liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^2\right) = \liminf_{n\to\infty} \widetilde{M}\left(\|u_n\|^2\right).$$

Ainsi

$$\widetilde{M}\left(\|v\|^2\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \widetilde{M}\left(\|u_n\|^2\right). \tag{3.4.1}$$

Sachant que $u \mapsto \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx + \lambda \int_\Omega f(x)udx$, est faiblement continue alors

$$\frac{1}{p+1}\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx + \lambda\int_\Omega f(x)u_ndx \to \frac{1}{p+1}\int_\Omega |v|^{p+1}dx + \lambda\int_\Omega f(x)vdx. \tag{3.4.2}$$

De (3.4.1) et (3.4.2) on en déduit que I est faiblement semi-continue inférieurement, et par conséquent

$$\alpha \leq I(v) \leq \liminf_{n\to\infty} I(u_n) = \alpha,$$

d'où $I(v) = \alpha$, ce qui montre que I atteint son infinimum à la limite v.
Montrons que v est à énergie négative. Posons

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega;\ f(x) > 0\}, \qquad \Omega^- = \{x \in \Omega;\ f(x) \leq 0\}$$

et choisissons une fonction positive $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ telle que supp$\varphi \subset \Omega^+$.
Pour $t \in (0,1)$ on a

$$\begin{aligned} I(t\varphi) &= \frac{1}{2}\widetilde{M}(\|t\varphi\|^2) - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |t\varphi|^{p+1}dx - \lambda\int_{\Omega^+} f(x)t\varphi dx - \lambda\int_{\Omega^-} f(x)t\varphi dx \\ &\leq \frac{1}{2}M(t^2\|\varphi\|^2)\|\varphi\|^2 t^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega |\varphi|^{p+1}dx \\ &\leq \frac{1}{2}M(\|\varphi\|^2)\|\varphi\|^2 t^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega |\varphi|^{p+1}dx. \end{aligned}$$

Puisque $1 < p+1 < 2$, on en déduit que $I(t\varphi) < 0$ pour les petites valeurs de t et donc

$$I(v) = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} I(u) \leq \inf_{0<t<1} I(t\varphi) < 0.$$

v est alors un minimum global non trivial de I ayant une énergie négative. Le Théorème 3.1.4 est prouvé.

Références

[1] C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa; On existence of solutions for a class of problem involving a nonlinear operator; Communications on Applied Nonlinear Analysis, 8(2001) 43-56.

[2] C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa, T. F. Ma; Positive solutions for quasilinear elliptic equations of Kirchhoff type; Computers and Mathematics with Applications, 49(2005) 85-93.

[3] N. P. C*ác*, J. A. Gatica, Y. Li; Positive solutions to semilinear problems with coefficient that changes sign; Nonlinear Analysis, 37(1999) 501-510.

[4] F. J. S. A. Corrêa, S. D. B. Menezes; Existence of solutions to nonlocal and singular elliptic problems via Galerkin method; Electronic Journal of Differential Equations, 19(2004) 1-10.

[5] Q. Dai, Y. Gu; Positive solutions for non-homogeneous semilinear elliptic equations with data that changes sign; Proceeding of the Royal Society of Edinburgh, 133A(2003) 297-306.

[6] G. Kirchhoff; Mechanik; Teubner, Leipzig, 1876.

[7] J. L. Lions; On some questions on boundary value problems of mathematical physics; Mathematics Studies, Amsterdam, 30(1978) 284-346.

[8] J. L. Lions; Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires; Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969

[9] T. F. Ma; Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type; Nonlinear Analysis, 63(2005) 1967-1977.

Part II

Résultats d'Existence Pour Deux Problèmes Soulevés en Dynamique des Fluides

Chapter 4

Propriétés de la solution d'un problème aux limites soulevé en dynamique des fluides

4.1 Introduction

Dans ce chapitre on établira l'existence, la symétrie et l'unicité de la solution du problème suivant,

$$\begin{cases} Lu \equiv -u'' + q^2 u = f(x)\,|u|^p, & x \in]a,b[\\ u'(a) = 0 = u'(b), \end{cases} \tag{P_p}$$

où $p > 1$, $q > 0$, $0 \leq a < b \leq \pi$ et f est une fonction positive symétrique et continue sur $[a, b]$. Il s'agit d'une généralisation d'un problème soulevé en dynamique des fluides par Benjamin [1], concernant une équation décrivant la propagation unidirectionnelle dispersive non linéaire des ondes . L'équation obtenue dans [1] constitue un modèle approximatif pour les ondes longues dans un système à deux fluides. Le problème a été repris par Mays et Norbury dans [3], où ils ont étudié l'équation

$$\begin{cases} -u'' + q^2 u = (1 + \sin x)\, u^2, & x \in]0,\pi[\\ u'(0) = 0 = u'(\pi). \end{cases} \tag{P_2}$$

Ces auteurs ont déterminé l'ensemble des valeurs du paramètre q pour lesquelles la solution existe et ont établi les propriétés de cette solution en l'occurrence, unicité démontrée par une méthode numérique, positivité et symétrie. Dans [5], Torres a étudié analytiquement le problème (P_2). Il a obtenu les bornes inférieure et supérieure de la solution et a déterminé les valeurs du paramètres q pour lesquelles la solution existe et est symétrique. L'unicité est mentionnée comme étant un problème ouvert dans l'article de Torres. Dans le présent chapitre on généralise le travail [5] au problème (P_p). On démontrera, par une méthode analytique, en plus de l'existence et la symétrie, l'unicité de la solution.
Le long de ce chapitre on utilisera les notations suivantes:

$$E := C([a,b]) = \{u : [a,b] \to \mathbb{R},\ \text{continue}\}.$$

Pour $u \in E$ on pose

$$\|u\|_0 = \sup \{|u(x)|, \quad x \in [a,b]\}$$

et

$$\|u\|_\gamma = \left(\int_a^b |u(x)|^\gamma \, dx \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \text{pour } \gamma \geq 1.$$

Le résultat d'existence est basé sur la notion du cône et plus exactement sur le théorème suivant dû à Krasnoselskii.

Théorème 4.1.1. [2] *Soit Ω_1 et Ω_2 deux ouverts bornés d'un espace de Banach F tels que $0 \in \Omega_1$ et $\Omega_1 \subset \overline{\Omega_2}$ et P un cône de F. Soit $A : P \cap \overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1 \to P$ un opérateur complètement continu, tel que l'une des conditions suivantes soit satisfaite,*

1. $\|Ax\| \leq \|x\|, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|Ax\| \geq \|x\|, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_2$,
2. $\|Ax\| \geq \|x\|, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|Ax\| \leq \|x\|, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_2$.

Alors l'opérateur A admet au moins un point fixe dans $P \cap \overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1$.

On aura recours aussi au théorème d'Ascoli-Arzela que nous rappelons ici.

Théorème 4.1.2. [4] *Soit $C(K, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur l'ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^n$. Alors un sous-ensemble S de $C(K, \mathbb{R})$ est relativement compact si et seulement si les fonctions de S sont uniformément bornées et équicontinues.*

4.2 Résultat d'existence

Dans cette section, en se servant de la fonction de Green on montrera que la résolution du problème (P_p) se ramène à la recherche d'un point fixe d'un certain opérateur A que l'on définira.

Théorème 4.2.1. *Si la fonction f est continue et positive sur $[a,b]$, alors le problème (P_p) admet au moins une solution positive pour tous nombres $q > 0$ et $p > 1$.*

Démonstration. Commençons par déterminer la fonction de Green de l'opérateur L avec les conditions de Neumann.
Soit u_a une solution du problème homogène

$$\begin{cases} -u'' + q^2 u = 0, & x \in]a,b[\\ u'(a) = 0, \end{cases} \tag{H_a}$$

associée au problème (P_p). Et soit u_b une solution de (H_b) c-à-d vérifiant l'autre condition $u_b'(b) = 0$. Un calcul simple nous donne

$$u_a(x) = \exp(qx) + \exp(q(2a - x)), \quad u_b(x) = \exp(qx) + \exp(q(2b - x)).$$

Le wronskien des fonctions u_a et u_b est donné par,

$$w(u_a, u_b) = 2q\left(\exp(2qa) - \exp(2qb)\right),$$

et la fonction de Green de l'opérateur L est donc définie par,

$$G(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{u_a(x)u_b(y)}{w(u_a,u_b)} & si \quad x \leq y \\ -\dfrac{u_a(y)u_b(x)}{w(u_a,u_b)} & si \quad x \geq y. \end{cases}$$

On remarque que cette fonction est positive et continue sur le carré $[a,b] \times [a,b]$ pour tous $q > 0$ et $p > 1$, car les fonctions u_a et u_b sont positives et $w(u_a, u_b)$ est négatif. Finalement la solution du problème (P_p) peut-être mise sous la forme,

$$u(x) = \int_a^b G(x,y) |u(y)|^p f(y)\, dy \equiv Au(x).$$

La solution du problème (P_p) est donc un point fixe de l'opérateur A.
Posons

$$m = \min\{G(x,y); (x,y) \in [a,b] \times [a,b]\} \quad M = \max\{G(x,y); (x,y) \in [a,b] \times [a,b]\}$$
$$\alpha = \min\{f(x); a \leq x \leq b\}, \quad \beta = \max\{f(x); a \leq x \leq b\}, \quad l = b - a,$$

on remarque que ces nombres sont tous positifs.
Considérons à présent l'espace de Banach E muni de la norme $\|.\|_0$ et définissons le cône

$$P = \left\{ u \in E, \quad \min_{a \leq x \leq b} u(x) \geq \frac{m}{M} \|u\|_0 \right\}.$$

Le cône P est stable par l'opérateur A, c-à-d $AP \subset P$.
En effet, soit u un élément fixé de P. On a

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_a^b G(x,y) |u(y)|^p f(y)\, dy \\ &\geq m \int_a^b u^p(y) f(y)\, dy \\ &\geq \frac{m}{M} \int_a^b G(s,y) u^p(y) f(y)\, dy, \end{aligned}$$

d'où

$$A(x) \geq \frac{m}{M} Au(s), \quad \forall x, s \in [a,b]$$

d'où il en résulte que

$$\min_{a \leq x \leq b} Au(x) \geq \frac{m}{M} \|Au\|_0,$$

ceci montre que $Au \in P$ pour tout $u \in P$, donc $AP \subset P$.
Montrons maintenant que l'opérateur $A : P \to P$ est complètement continu.
A est continu: Pour tout élément u_0 fixé de P et pour tout $u \in P$, on a

$$|Au(x) - Au_0(x)| \leq \int_a^b |u^p(y) - u_0^p(y)| G(x,y) f(y) \, dy, \quad \forall x \in [a,b].$$

Par application du théorème des accroissements finis, on écrit

$$|Au(x) - Au_0(x)| \leq p \int_a^b |u(y) - u_0(y)| G(x,y) f(y) (v(y))^{p-1} \, dy, \qquad (4.2.1)$$

où $v(y)$ est un nombre réel appartenant à l'intervalle ouvert d'extrémités $u(y)$ et $u_0(y)$. De (4.2.1) on en déduit que

$$\|Au - Au_0\|_0 \leq p\beta M \|u - u_0\|_0 \int_a^b (v(y))^{p-1} \, dy,$$

ceci prouve que l'opérateur A est continu sur P.
A envoie toute partie bornée de P en une partie relativement compacte:
Soit $(u_n)_n$ une suite bornée de P, c-à-d que

$$\|u_n\|_0 \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pour une certaine constante $C > 0$. Montrons que l'ensemble $S := \{Au_n, n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact.
Les fonctions Au_n sont uniformément bornées car pour tout $x \in [a,b]$ on a

$$Au_n(x) = \int_a^b G(x,y) u_n^p(y) f(y) \, dy \leq \beta l M C^p.$$

Montrons que les fonctions Au_n sont équicontinues. Soit x_1 et x_2 deux réels fixés quelconques de $[a,b]$. On a

$$|Au_n(x_1) - Au_n(x_2)| = \left| \int_a^b (G(x_1,y) - G(x_2,y)) \, u_n^p(y) f(y) dy \right|.$$

Comme, pour tout réel fixé y de $[a,b]$, la fonction $x \mapsto G(x,y)$ est uniformément continue sur $[a,b]$ c-à-d

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0; |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |G(x_1,y) - G(x_2,y)| < \varepsilon,$$

alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0; |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |Au_n(x_1) - Au_n(x_2)| < \beta l C^p \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Le nombre $\delta(\varepsilon)$ est indépendant de y car ce dernier appartient à l'intervalle compact $[a,b]$.

Les fonctions Au_n sont donc équicontinues et en conséquence du Théorème 4.1.2 l'ensemble S est relativement compact, et par suite l'opérateur A est complètement continu. Considérons à présent les boules ouvertes suivantes:

$$\Omega_1 = \{u \in E; \|u\|_0 < r_1\} \quad \text{et} \quad \Omega_2 = \{u \in E; \|u\|_0 < r_2\}$$

où

$$r_1 = (\beta l M)^{-\frac{1}{p-1}} \quad \text{et} \quad r_2 = \left(\frac{M^p}{\alpha l m^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Puisque $\dfrac{\beta}{\alpha} > 1$ et $\dfrac{M}{m} > 1$ on a $r_1 < r_2$ et $0 \in \Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$. On est dans les circonstances de l'application du théorème 4.1.1.

- Si $u \in P \cap \partial\Omega_1$ alors

$$\|Au\|_0 \leq \beta l M \|u\|_0^p = \beta l M r_1^p = r_1 = \|u\|_0 .$$

- Si $u \in P \cap \partial\Omega_2$

$$\|Au\|_0 \geq \alpha m \int_a^b u^p(y)\, dy \geq \alpha m l \left(\min_{a \leq x \leq b} u(x)\right)^p,$$

d'où puisque $u \in P$

$$\|Au\|_0 \geq \alpha m l \left(\frac{m}{M} \|u\|_0\right)^p = \frac{\alpha l m^{p+1}}{M^p} \|u\|_0^p$$

et comme $\|u\|_0 = r_2$ on obtient

$$\|Au\|_0 \geq \frac{\alpha l m^{p+1}}{M^p} r_2^p = r_2 = \|u\|_0 .$$

La condition (1) du théorème 4.1.1 est donc satisfaite, par conséquent l'opérateur A admet au moins un point fixe $u \in P \cap \overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1$. Ainsi le problème (P_p) a au moins une solution positive pour tout $q > 0$. A noter que cette solution est telle que

$$m(\beta l M^p)^{-\frac{1}{p-1}} \leq u(x) \leq \left(\alpha l m^{p+1} M^{-p}\right)^{-\frac{1}{p-1}}, \qquad \forall x \in [a, b].$$

□

4.3 Borne supérieure uniforme et symétrie des solutions

Avant d'établir la symétrie des solutions du problème, on commence par déterminer une "borne supérieure" uniforme de ces solutions.

Théorème 4.3.1. *Si la fonction f est positive et continue sur $[a, b]$, alors il existe une constante C_q telle que toute solution positive u du problème (P_p) vérifie l'inégalité,*

$$u(x) < C_q \qquad \forall x \in [a, b].$$

Démonstration. Soit u une solution positive du problème (P_p). Par intégration de l'équation sur l'intervalle [a, b] on obtient,

$$q^2\|u\|_1 = \int_a^b u^p(y)f(y)dy \geq \alpha\|u\|_p^p,$$

or en utilisant l'inégalité de Hölder on écrit

$$\|u\|_1 = \int_a^b u(y)dy \leq \left(\int_a^b dy\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_a^b u^p(y)dy\right)^{\frac{1}{p}} = l^{\frac{p-1}{p}}\|u\|_p.$$

En combinant ces deux inégalités on obtient

$$\alpha\|u\|_p^p \leq q^2\|u\|_1 \leq q^2 l^{\frac{p-1}{p}}\|u\|_p$$

d'où l'on arrive aux estimations suivantes:

$$\|u\|_p \leq \left(\frac{q^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}} l^{\frac{1}{p}} \qquad \text{et} \qquad \|u\|_1 \leq \left(\frac{q^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}} l.$$

Par ailleurs, pour tout $x \in]a, b[$ on a

$$u'(x) = \int_a^x u''(y)dy = \int_a^x \left(q^2u(y) - u^p(y)f(y)\right)dy \leq q^2\|u\|_1$$

d'où

$$u'(x) \leq q^2\left(\frac{q^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}} l.$$

De même en écrivant

$$-u'(x) = \int_x^b \left(q^2u(y) - u^p(y)f(y)\right)dy$$

on obtient

$$-u'(x) \leq q^2\left(\frac{q^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}} l,$$

et par suite

$$\|u'\|_0 \leq q^2\left(\frac{q^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}} l.$$

D'autre part,

$$u'(a) = u'(b) \quad \Longrightarrow \quad \exists x_0 \in]a, b[; \quad u''(x_0) = 0.$$

En portant dans l'équation du problème (P_p), on obtient

$$u^{p-1}(x_0) = \frac{q^2}{f(x_0)}$$

ainsi

$$\left(\frac{q^2}{\beta}\right)^{\frac{1}{p-1}} \leq u(x_0) \leq \left(\frac{q^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

La constante C_q est déduite en écrivant

$$u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^{x} u'(y)dy < \left(\frac{q^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}} + l\|u'\|_0,$$

d'où pour tout $x \in [a, b]$

$$u(x) < \left(\frac{q^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}} + (ql)^2 \left(\frac{q^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

La "borne supérieure" uniforme est $C_q = (1 + q^2 l^2) \left(\frac{q^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}}$. □

Nous aurons besoin de cette constante pour démontrer la symétrie des solutions du problème (P_p).

Théorème 4.3.2. *Si la fonction f est positive, symétrique et continue sur $[a, b]$ et le paramètre positif q satisfait l'inégalité suivante,*

$$p\beta \frac{q^2}{\alpha} \left(1 + q^2 l^2\right)^{p-1} < 1 + q^2 \tag{4.3.1}$$

alors toute solution positive du problème (P_p)est symétrique.

Démonstration. On reprend l'idée de [5] avec quelques changements. Soit u_1 une solution positive de (P_p), alors la fonction u_2 définie sur $[a, b]$ par $u_2(x) = u_1(a+b-x)$ est aussi une solution de (P_p) car la fonction f est symétrique. Montrons que $u_1 \equiv u_2$ et donc nous aurons prouvé que u_1 est symétrique.
Posons $z = u_1 - u_2$, alors z est solution du problème suivant,

$$\begin{cases} z'' + g(x)z = 0, & x \in]a, b[\\ z'(a) = z'(b) = 0, \end{cases} \tag{4.3.2}$$

où $g(x) = pf(x)\,(w(x))^{p-1} - q^2$ et le nombre réel $w(x)$ est compris entre $u_1(x)$ et $u_2(x)$ et est tel que

$$u_1^p(x) - u_2^p(x) = p\,(w(x))^{p-1}\,(u_1(x) - u_2(x)).$$

En utilisant le fait que les deux solutions u_1 et u_2 sont majorées par la constante C_q et la condition (4.3.1), on vérifie que

$$g(x) < 1, \qquad \forall x \in [a, b]. \tag{4.3.3}$$

en effet,

$$\begin{aligned} g(x) = pf(x)\,(w(x))^{p-1} - q^2 &\leq p\beta C_q^{p-1} - q^2 \\ &= p\beta\left(1 + q^2 l^2\right)^{p-1} \frac{q^2}{\alpha} - q^2 \\ &< \left(1 + q^2\right) - q^2 = 1. \end{aligned}$$

Reste à montrer que $z \equiv 0$. Supposons au contraire que la solution z n'est pas identiquement nulle et passons aux coordonnées polaires,

$$z = r\cos\theta, \qquad z' = -r\sin\theta, \qquad r > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

avec $r, \theta \in C^1([a,b])$. En dérivant on obtient

$$z' = r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta = -r\sin\theta \tag{4.3.4}$$

et

$$z'' = -r'\sin\theta - r\theta'\cos\theta,$$

mais d'après (4.3.2) on a $z'' = -g(x)z$ d'où

$$r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta = g(x)r\cos\theta. \tag{4.3.5}$$

Maintenant en multipliant la relation (4.3.4) par $-\sin\theta$ et la relation (4.3.5) par $\cos\theta$ et en additionnant on tire,

$$\theta' = g(x)\cos^2\theta + \sin^2\theta. \tag{4.3.6}$$

Par intégration de (4.3.6) sur l'intervalle $[a,x]$ pour $a < x \leq b$ on obtient grâce à (4.3.3),

$$\theta(x) - \theta(a) = \int_a^x \left(g(y)\cos^2\theta(y) + \sin^2\theta(y)\right) dy < \int_a^x dy = x - a. \tag{4.3.7}$$

En remarquant que $z(x) = -z(a+b-x)$ on en déduit que $z\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0$. D'où d'après le théorème de comparaison de Sturm avec l'équation

$$z'' + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 z = 0$$

qui admet pour solution

$$z_0(x) = \sin\frac{\pi}{l}(x-a),$$

on conclut que $\dfrac{a+b}{2}$ est le seul zéro de z dans l'intervalle $[a,b]$.
La solution z est supposée non identiquement nulle et $z(a) = -z(b)$, d'où

$$z(a)z(b) < 0.$$

Supposons que $z(a) > 0$, alors de $z'(a) = 0$ on obtient

$$\theta'(a) = 0.$$

D'autre part $z\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0$ donc

$$\theta\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad \theta\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

et d'après (4.3.7) on obtient

$$\pi < b - a \qquad \text{ou} \qquad 3\pi < b - a$$

C'est une contradiction. D'où $z \equiv 0$ et par suite

$$u_1(x) = u_1(a+b-x) \qquad \forall x \in [a,b].$$

La solution u_1 est donc symétrique par rapport à l'axe d'équation $x = \dfrac{a+b}{2}$. $\square$

Dans la section suivante on établit l'unicité de la solution.

4.4 Unicité de la solution positive

Soit λ_1 la première valeur propre positive du problème aux limites avec conditions de Neumann suivant,

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u, \quad x \in]a,b[\\ u'(a) = u'(b) = 0. \end{cases} \tag{P_N}$$

On a va démontrer le résultat suivant,

Théorème 4.4.1. *Si la fonction f est positive et continue sur l'intervalle $[a,b]$, alors pour tout nombre positif q tel que*

$$p\beta\frac{q^2}{\alpha}\left(1+q^2l^2\right)^{p-1} < q^2 + \lambda_1, \tag{4.4.1}$$

le problème (P_p) admet une solution positive unique.

Démonstration. L'existence de solutions positives étant acquise, on se contentera de montrer l'unicité .

Supposons que le problème (P_p) admet deux solutions positives u_1 et u_2. Alors la fonction $v \equiv u_1 - u_2$ est solution du problème suivant,

$$\begin{cases} -v'' + q^2 v = \left(u_1^p(x) - u_2^p(x)\right) f(x), \quad x \in]a,b[\\ v'(a) = v'(b) = 0. \end{cases} \tag{4.4.2}$$

En se servant du théorème des accroissements finis, on écrit

$$u_1^p(x) - u_2^p(x) = pw^{p-1}(x)\left(u_1(x) - u_2(x)\right) = pw^{p-1}(x)v(x)$$

où le nombre réel $w(x)$ est compris entre $u_1(x)$ et $u_2(x)$. A noter que la fonction $x \mapsto w(x)$ est continue sur $[a,b]$ et peut être définie comme suit

$$\begin{cases} w^{p-1}(x) = \dfrac{u_1^p(x) - u_2^p(x)}{p\,(u_1(x) - u_2(x))} & \text{si } u_1(x) \neq u_2(x), \\ w(x) = u_1(x) & \text{si } u_1(x) = u_2(x). \end{cases}$$

Ceci étant, le problème (4.4.2) devient

$$\begin{cases} -v'' + h(x)v = 0, \quad x \in]a,b[\\ v'(a) = v'(b) = 0, \end{cases} \tag{4.4.3}$$

où $h(x) = q^2 - pw^{p-1}(x)f(x)$. Comme la fonction w est majorée sur l'intervalle $[a,b]$ par la constante C_q alors pour tout $x \in [a,b]$ on a

$$q^2 - p\beta C_q^{p-1} \leq h(x) \leq q^2. \tag{4.4.4}$$

Multiplions l'équation du problème (4.4.3) par v et intégrons sur l'intervalle $[a,b]$, nous obtenons

$$\int_a^b (v'(x))^2\,dx + \int_a^b h(x)v^2(x)dx = 0. \tag{4.4.5}$$

On sait que la première valeur propre positive λ_1 est caractérisée par

$$\lambda_1 = \inf\left\{\int_a^b (v'(x))^2\,dx; \quad v \in H^1(]a,b[), v'(a) = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b v^2(x)dx = 1\right\},$$

d'où

$$\lambda_1 \int_a^b v^2(x)dx \leq \int_a^b (v'(x))^2\,dx.$$

De cette relation et (4.4.5) on arrive à

$$\int_a^b (\lambda_1 + h(x))\,v^2(x)dx \leq \int_a^b (v'(x))^2\,dx + \int_a^b h(x)v^2dx = 0$$

Comme pour tout $x \in [a,b]$, d'après (4.4.1), $\lambda_1 + h(x) > 0$ on en déduit que $v \equiv 0$ sur $[a,b]$ et par suite $u_1 \equiv u_2$. Ceci achève la démonstration du théorème. □

Les théorèmes précédemment démontrés sont résumés dans le théorème suivant,

Théorème 4.4.2. *Si la fonction f est continue, positive et symétrique sur $[a,b]$ et le paramètre q est tel que,*

$$p\frac{\alpha}{\beta}q^2\left(1 + q^2l^2\right)^{p-1} < q^2 + \min\left(1, \frac{\pi^2}{l^2}\right)$$

alors le problème (P_p) admet une solution positive unique et symétrique.

Remarque 4.4.1. *A noter que, pour le problème (P_N), $\lambda_1 = \dfrac{\pi^2}{l^2}$.*

On termine ce chapitre par l'application suivante,

Application. Prenons le problème étudié par Torres [5], c-à-d

$$p = 2, \qquad f(x) = 1 + \sin x, \qquad \text{et} \quad [a, b] = [0, \pi],$$

et par suite

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 2, \quad l = \pi \qquad \text{et} \quad \lambda_1 = 1.$$

D'après le théorème 4.4.1 ce problème admet une solution positive unique si

$$4\pi^2 q^4 + 3q^2 - 1 < 0,$$

c-à-d si

$$q \in]0, \quad 0,354446...[.$$

C'est le même intervalle des valeurs du paramètre q pour lesquelles la solution est symétrique dans l'article [5].

Références

[1] T. B. Benjamin; Solitary and periodic waves of a new kind, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A354 (1996) 1775-1806.

[2] M. A. Krasnoselskii; Positive solutions of operators equations, Noordhoff, Groningen, 1964.

[3] L. Mays, J. Norbury; Bifurcation of positive solutions for a Neumann boundary value problem, ANZIAM J. 42(2002) 324-340.

[4] L. Schwartz; Topologie générale et analyse fonctionnelle, Edition Hermann, Paris, 1970.

[5] P. J. Torres; Some remarks on a Neumann boundary value problem arising in fluid dynamics, ANZIAM J. 45(2004) 327-332.

Chapter 5

Résultat d'existence pour un problème fortement couplé soumis à la loi de Tresca et contenant un terme de convection

5.1 Introduction

Soit ω un domaine borné fixé de $\mathbb{R}^2$, à frontière lipschitzienne continue. On suppose que ω est la surface inférieure du domaine Ω occupé par le fluide, la surface supérieure Γ_1 est définie par l'équation $x_3 = h(x')$ où $x' = (x_1, x_2)$ et h est une fonction régulière positive et bornée. Ainsi Ω est donné par,

$$\Omega = \left\{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3; \quad x' \in \omega \quad et \quad 0 < x_3 < h\left(x'\right)\right\}.$$

La frontière $\partial\Omega$ est composée de trois parties; $\partial\Omega = \overline{\omega} \cup \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_L$, où Γ_L la frontière latérale. On considère le problème stationnaire décrivant, dans le domaine Ω, le mouvement d'un fluide non newtonien incompressible et non isotherme. Ce problème est déduit (voir [5]) des trois lois de conservations, de la masse, la quantité de mouvement et de l'énergie (consulter par exemple [15, 19]), où la densité est supposée constante égale à 1, ainsi la loi de conservation de la masse devient la condition de l'incompressibilité du fluide,

$$div\left(v\right) = 0 \quad dans \quad \Omega, \tag{5.1.1}$$

où v est la vitesse du fluide. De nombreux écoulements de fluides (polymères fondus en solution, des huiles, pâtes, boues ...) ne vérifient pas la loi de Newton $\sigma(v) = -\pi I + 2\mu D(v)$, avec $\mu = const.$, mais une formule plus compliquée dans laquelle la viscosité μ varie avec le tenseur des taux de déformations $D(v)$, la température θ, ou encore le second invariant $D_{11} = \frac{1}{2}D_{i,j}(v)D_{i,j}(v)$. Nous supposons ici que le phénomène de conduction de la chaleur est décrit par la loi de Fourier, reliant flux de la chaleur à la température θ, d'où la loi de conservation d'énergie mène à l'équation

$$v.\nabla\theta = 2\mu\left(\theta, v, \left|D\left(v\right)\right|\right) D\left(v\right) : D\left(v\right) + div(K\nabla\theta) + r\left(\theta\right) \quad dans \quad \Omega, \tag{5.1.2}$$

où K est une fonction positive sur Ω et r est une fonction réelle.

Le mouvement du fluide est supposé très lent de sorte que la loi de conservation de la quantité de mouvement nous donne l'équation

$$-2div\,(\mu\,(\theta, v, |D(v)|)\,D(v)) + \nabla\pi = f \quad dans \quad \Omega, \tag{5.1.3}$$

où π est la pression du fluide, f est un vecteur donné et sera spécifié ultérieurement.

Comparé aux travaux [2]-[9] et aux articles récents, la nouveauté, à notre connaissance, dans le présent travail est premièrement, la prise en compte des effets de la convection de la chaleur exprimée par la présence du terme de gauche dans (5.1.2), deuxièmement on suppose que la viscosité μ du fluide est une fonction dépendant de sa température, sa vitesse et de son tenseur des taux de déformations. Ce choix fait inclure les cas de loi de puissance, [13,16], la loi de Carreau [14, 20] ou la loi de Bingham [15].

Ce choix permet également de trouver la viscosité appropriée qui répond à quelques besoins industriels tels que, par exemple, la fabrication de gilet pare-balles, contenant un fluide qui a la capacité de se concentrer sur l'impact du projectile lors d'un contact avec le gilet pare-balles.

On peut lire d'autres situations dans l'article [12] concernant l'existence de solutions globales d'un problème de Navier-Stokes dont la viscosité ν du fluide dépend de la vitesse de cisaillement et de la pression i.e $\nu = \nu(p, |D(v)|^2)$. Dans [11] les auteurs considèrent les écoulements de fluides dans des domaines non bornés avec une viscosité ayant la même forme que dans [12].

Revenons à notre problème, pour fermer le système il est nécessaire de donner les conditions aux bords pour la température θ et la vitesse v. On suppose que la température satisfait à la condition de Neumann suivante,

$$K\frac{\partial\theta}{\partial n} = \theta_\omega, \quad sur \quad \omega, \tag{5.1.4}$$

où $n = (n_1, n_2, n_3)$ est la normale unitaire sortante de $\partial\Omega$, et θ_ω est un flux de température donné fixé sur ω. On ajoute la condition de Dirichlet suivante,

$$\theta = 0, \quad sur \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_L. \tag{5.1.5}$$

Pour les conditions aux bords relatives à la vitesse v, soit $g = (g_1, g_2, g_3)$ une fonction telle que

$$\int_{\partial\Omega} g.nds = 0, \quad g_3 = 0 \quad sur \quad \Gamma_L, \quad g = 0 \quad sur \quad \Gamma_1, \quad g.n = 0, \quad sur \quad \omega,$$

la vitesse sur Γ_L est inconnue et est parallèle au plan (x_1, x_2) d'où,

$$v = g \quad sur \quad \Gamma_L, \tag{5.1.6}$$

la surface supérieure Γ_1 étant supposée fixée alors

$$v = 0 \quad sur \quad \Gamma_1. \tag{5.1.7}$$

On suppose qu'il n'y a pas de flux à travers ω, d'où la composante normale de la vitesse est nulle

$$v.n = 0 \quad sur \quad \omega, \tag{5.1.8}$$

mais la composante tangentielle v_t de la vitesse est inconnue et satisfait la loi de Tresca [2], [15] Chap.3,

$$\begin{cases} |\sigma_t| = k \Rightarrow \exists \lambda \geq 0; v_t = s - \lambda \sigma_t, \\ |\sigma_t| < k \Rightarrow v_t = s. \end{cases} \tag{5.1.9}$$

Où k est le seuil limite pour la contrainte, s est la vitesse de la surface ω et σ_t est la composante tangentielle de σn, où $\sigma = (\sigma_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ est le tenseur des contraintes défini par

$$\sigma_{ij} = 2\mu\left(\theta, v, |D\left(v\right)|\right) d_{ij}\left(v\right) - \pi\delta_{ij}, \tag{5.1.10}$$

avec δ_{ij} est le symbole de Kronecker et $D(v)$ est le tenseur des taux de déformations donné par

$$D(v) = (d_{ij}(v))_{1\leq i,j\leq 3}, \quad d_{ij}(v) = \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j). \tag{5.1.11}$$

On écrit ∂_i pour désigner $\frac{\partial}{\partial x_i}$ et on utilisera la convention de sommation implicite sur les indices répétés. Le terme $|D(v)|$ dénote la norme euclidienne de $D(v)$, c-à-d $|D(v)|^2 = d_{ij}(v)d_{ij}(v)$, induite par le produit scalaire $D(u) : D(v) = d_{ij}(u)d_{ij}(v)$.

Le plan de ce chapitre est comme suit: Dans la section 5.2 on établira la formulation variationnelle du problème considéré (5.1.1)-(5.1.9). A noter que les termes $\mu\left(\theta, v, |D\left(v\right)|\right) D\left(v\right) : D\left(v\right)$ et $v.\nabla\theta$ dans (5.1.2) et $div\left(\mu\left(\theta, v, |D(v)|\right) D(v)\right)$ dans (5.1.3) nous conduisent à considérer des ensembles particuliers et les espaces de Sobolev $\left(W^{1,p}\left(\Omega\right)\right)^3$ et $\left(W^{1,q}\left(\Omega\right)\right)^3$ où $p > 3$ et q est son exposant conjugué, pour plus de détails voir la démonstration de la proposition 5.2.1. Dans cette même section on donnera deux lemmes nécessaires pour montrer, dans la section suivante, la bornitude et coercivité de l'opérateur A défini par

$$\langle A(v), \varphi\rangle = \int_\Omega 2\mu\left(\theta, v, |D(v)|\right) d_{ij}(v)\partial_j\varphi_i dx.$$

En fait sa coercivité s'ensuit aussi de l'assertion suivante,

$$\lim_{\|v\|_{1,2}\to+\infty} \frac{\|v\|_{1,2}}{\|v\|_{1,p}} \neq 0,$$

qui est prouvée au cours de la preuve du Théorème 5.3.1, pour les notations, voir la section suivante. A noter aussi que puisque la fonction μ ne dépend pas explicitement de ses arguments, nous pousse à la supposer monotone par rapport à $|D(v)|$ ce qui va nous permettre à établir la monotonicité de l'opérateur A.

Dans la section 5.3 on étudiera les résultats d'existence du problème 5.2.1, en trois sous-sections.

Dans la sous-section 5.3.1, pour une température donnée $\theta \in W^{1,q}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ et $f \in (W^{1,p}(\Omega))^3$, $0 \leq k \in L^p(\omega)$, on montre dans le Théorème 5.3.1, grâce aux inégalités de Cauchy-Schwarz et Korn et aux résultats classiques relatifs aux opérateurs monotones, qu'il existe au moins $v_\theta \in W^{1,p}_{div}(\Omega)$ solution du problème intermédiaire 5.3.1. On montrera aussi dans le lemme 5.3.2 que v_θ est bornée dans $W^{1,p}_{div}(\Omega)$, indépendamment de la température θ. Ceci est utilisé dans le Théorème 5.3.2 dans lequel on établira l'existence de la pression $\pi \in L^p_0(\Omega)$ satisfaisant à l'inéquation variationnelle (5.2.1).

Dans la sous-section 5.3.2, un second problème intermédiaire est considéré. Il s'agit de trouver, la vitesse $v \in V^p_{div}$ étant donnée, la température solution du problème 5.3.2. On remarquera que, selon la formulation faible, la température θ doit être obtenue dans l'espace $W^{1,q}(\Omega)$. Mais cette formulation nous mène après linéarisation de l'équation correspondante à une forme bilinéaire $B(\theta, \psi)$ définie dans l'espace $W^{1,q}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$. Et pour pouvoir appliquer le théorème de Lax-Milgram, on a considéré l'espace de Hilbert $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, et on a établi dans le Théorème 5.3.3 l'existence et l'unicité de θ dans $H^1(\Omega)$, solution du problème linéarisé 5.3.3, et par suite $\theta \in W^{1,q}(\Omega)$, car $1 < q < 2$, voir d'autres raisons pour ce choix de l'espace $H^1(\Omega)$ dans la démonstration du Théorème 5.3.3.

En utilisant le théorème du point fixe de Schauder, on montre dans le Théorème 5.3.4, l'existence de $\theta \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ solution du second problème intermédiaire (5.3.2), ensuite on établira son unicité dans le Théorème 5.3.5 par une méthode de monotonie.

Dans la sous-section 5.3.3, on récapitule dans le Théorème 5.3.6, les hypothèses nécessaires utilisées pour prouver l'existence d'au moins une solution du problème variationnel global 5.2.1.

5.2 Formulation faible

Soit p un nombre réel supérieur à 1, et q son exposant conjugué c-à-d $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. On sait du lemme 2.2 dans [17] que pour $g \in \left(W^{1-\frac{1}{p},p}\left(\partial\Omega\right)\right)^3$, il existe une fonction G dans $\left(W^{1,p}\left(\Omega\right)\right)^3$ telle que,

$$div(G)=0 \quad dans \quad \Omega, \quad G=g \quad sur \quad \Gamma_L\cup\Gamma_1, \quad G.n=0 \quad sur \quad \omega.$$

En vue d'établir la formulation faible du problème, on introduit les ensembles suivants,

$$V^p=\left\{\varphi\in\left(W^{1,p}\left(\Omega\right)\right)^3; \quad \varphi=G \quad sur \quad \Gamma_L, \quad \varphi=0 \quad sur \quad \Gamma_1 \quad et \quad \varphi.n=0 \quad sur \quad \omega\right\},$$

$$V^p_{div}=\left\{\varphi\in V^p; \quad div\left(\varphi\right)=0 \quad dans \quad \Omega\right\},$$

V^p et V^p_{div} sont des ensembles convexes fermés de $\left(W^{1,p}\left(\Omega\right)\right)^3$. On considère aussi les espaces suivants,

$$V^p_0=\left\{\varphi\in\left(W^{1,p}\left(\Omega\right)\right)^3; \quad \varphi=0, \quad sur \quad \Gamma_L\cup\Gamma_1 \quad et \quad \varphi.n=0 \quad sur \quad \omega\right\}$$

$$V^p_{0,div}=\left\{\varphi\in V^p_0; \quad div\left(\varphi\right)=0 \quad dans \quad \Omega\right\},$$

$$L^p_0\left(\Omega\right)=\left\{u\in L^p\left(\Omega\right); \int_\Omega u(x)dx=0\right\},$$

et on pose,

$$V^p_\Gamma=\left\{\varphi\in\left(W^{1,p}\left(\Omega\right)\right)^3; \quad \varphi=0 \quad sur \quad \Gamma\right\},$$

$$W^{1,p}_\Gamma\left(\Omega\right)=\left\{\varphi\in W^{1,p}\left(\Omega\right); \quad \varphi=0 \quad sur \quad \Gamma\right\},$$

où Γ est une partie de $\partial\Omega$ avec $|\Gamma|:=$ mesure de $(\Gamma)\neq 0$.
A noter que $V^p_\Gamma=\left(W^{1,p}_\Gamma\left(\Omega\right)\right)^3$ et $V^p, V^p_0\subset V^p_{\Gamma_1}$. On note comme d'habitude, la norme de l'espace de Lebesgue $L^p\left(\Omega\right)$ par $\left\|v\right\|_p=\left(\int_\Omega|v|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$, et les normes des espaces de Banach V^p_Γ et $W^{1,p}_\Gamma\left(\Omega\right)$ sont désignées indifféremment par:

$$\left\|v\right\|_{1,p}=\left(\int_\Omega|\nabla v|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dans la proposition suivante nous déduisions la formulation variationnelle du problème (5.1.1)-(5.1.9).

Proposition 5.2.1. *Soit $p > 3$ et q son exposant conjugué. Pour $f \in (W^{1,p}(\Omega))^3$, $0 \leq k \in L^p(\omega)$, $\mu \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+)$, $K \in L^\infty(\Omega)$ et $r \in L^\infty(\mathbb{R})$, la formulation faible du problème* (5.1.1)-(5.1.9) *nous donne le problème variationnel suivant,*

Problème 5.2.1. *Trouver $v \in V^p_{div}$, $\pi \in L^p_0(\Omega)$ et $\theta \in W^{1,q}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ telles que*

$$a(\theta, v, \varphi - v) - (\pi, div(\varphi)) + j(\varphi) - j(v) \geq (f, \varphi - v) \quad \forall \varphi \in V^q, \tag{5.2.1}$$

$$B(\theta, \psi) = L(\theta, \psi) \quad \forall \psi \in W^{1,p}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega), \tag{5.2.2}$$

où

$$a(\theta, v, \varphi - v) = \int_\Omega 2\mu(\theta, v, |D(v)|) d_{ij}(v) \partial_j (\varphi_i - v_i)\, dx,$$

$$L(\theta, \psi) = 2\int_\Omega \mu(\theta, v, |D(v)|)\, |D(v)|^2 \psi dx + \int_\Omega r(\theta)\, \psi dx + \int_\omega \theta_\omega \psi dx', \tag{5.2.3}$$

et

$$B(\theta, \psi) = \int_\Omega K(x) \nabla\theta . \nabla\psi dx + \int_\Omega \psi v_i \partial_i \theta dx, \quad j(\varphi) = \int_\omega k\, |\varphi - s|\, dx'. \tag{5.2.4}$$

Démonstration. Observons d'abord que, puisque $p > 3$ et Ω est borné, si $v = (v_1, v_2, v_3) \in V^p$ alors $v_i \in L^\infty(\Omega)$. Ainsi pour $\psi \in W^{1,p}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ et $\theta \in W^{1,q}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ la deuxième intégrale dans $B(\theta, \psi)$ a un sens. Pour la première intégrale dans $L(\theta, \psi)$, nous avons $|D(v)|^2 \in L^{\frac{p}{2}}(\Omega)$ d'où $\mu(\theta, v, |D(v)|)\, |D(v)|^2 \psi \in L^1(\Omega)$ si μ est bornée. La fonctionnelle $a(\theta, v, \varphi - v)$ est bien définie puisque $d_{ij}(v) \in L^p(\Omega)$ et $\partial_j (\varphi_i - v_i) \in L^q(\Omega) - L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, car $1 < q < p$.
Pour obtenir l'inéquation variationnelle (5.2.1), on a de (5.1.3) et (5.1.10)

$$-\partial_j \sigma_{ij} = f_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{5.2.5}$$

Multiplions (5.2.5) par $\varphi_i - v_i$ où $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in V^q$ et intégrons sur Ω, nous obtenons

$$\int_\Omega \sigma_{ij} \partial_j (\varphi_i - v_i)\, dx - \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} (\varphi_i - v_i)\, n_j ds = \int_\Omega f_i (\varphi_i - v_i)\, dx. \tag{5.2.6}$$

Et comme $\varphi_i - v_i = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_L$ alors,

$$\int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} (\varphi_i - v_i)\, n_j ds = \int_\omega \sigma_{ij} (\varphi_i - v_i)\, n_j dx'.$$

Remarquons que $\sigma_{ij} n_j$ est la i ème composante du vecteur σn, qui peut être mis sous la forme $\sigma n = \sigma_t + \sigma_n n$, avec $\sigma_t = (\sigma_{t_1}, \sigma_{t_2}, \sigma_{t_3})$ et $\sigma_n = \sigma n . n$, d'où $\sigma_{ij} n_j = \sigma_{t_i} + \sigma_n n_i$. En utilisant cette égalité, on obtient

$$\int_\omega \sigma_{ij} (\varphi_i - v_i)\, n_j dx' = \int_\omega \sigma_{t_i} (\varphi_i - v_i)\, dx' + \int_\omega \sigma_n n_i (\varphi_i - v_i)\, dx'.$$

Sachant que, d'après (5.1.8), $n_i(\varphi_i - v_i) = 0$ sur ω, alors

$$\int_\omega \sigma_{ij}(\varphi_i - v_i)\, n_j dx' = \int_\omega \sigma_{t_i}(\varphi_i - v_i)\, dx'$$

et (5.2.6) devient

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\partial_j(\varphi_i - v_i)\, dx = \int_\omega \sigma_{t_i}(\varphi_i - v_i)\, dx' + \int_\Omega f_i(\varphi_i - v_i)\, dx. \tag{5.2.7}$$

Introduisons à présent la condition de Tresca. Pour ce faire, on rajoute aux deux membres de (5.2.7) le terme $\int_\omega k(|\varphi - s| - |v - s|)\, dx'$, d'où

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\partial_j(\varphi_i - v_i)\, dx + \int_\omega k(|\varphi - s| - |v - s|)\, dx' = \int_\Omega f_i(\varphi_i - v_i)\, dx + A, \tag{5.2.8}$$

avec

$$A = \int_\omega \left[\sigma_{t_i}(\varphi_i - v_i) + k(|\varphi - s| - |v - s|)\right] dx'.$$

Montrons que A est positif. Montrons d'abord, en suivant [15] Chap.3 page 140, que la condition (5.1.9) est équivalente à,

$$(v_t - s).\sigma_t + k|v_t - s| = 0. \tag{5.2.9}$$

En effet si (5.1.9) est vérifiée alors $|\sigma_t| = k$, d'où $v_t = s - \lambda\sigma_t$ pour un certain $\lambda \geq 0$, en conséquence

$$(v_t - s).\sigma_t + k|v_t - s| = -\sigma_t.\sigma_t + k\lambda|\sigma_t| = -\lambda\sigma_t^2 + \lambda\sigma_t^2 = 0.$$

Maintenant si $|\sigma_t| < k$, d'après (5.1.9) $v_t = s$ et (5.2.9) en résulte.
Inversement si $|\sigma_t| = k$, alors de (5.2.9) découle,

$$(v_t - s).\sigma_t = -|\sigma_t||v_t - s|,$$

d'où

$$\exists\lambda \geq 0 \quad \text{tel que} \quad v_t - s = -\lambda\sigma_t, \quad \text{i.e.} \quad v_t = s - \lambda.$$

La première partie de (5.1.9) est prouvée. Si $|\sigma_t| < k$, alors de (5.2.9) on a

$$(v_t - s).\sigma_t + k|v_t - s| = 0 \geq |v_t - s|(k - |\sigma_t|),$$

d'où $v_t - s = 0$ car $|\sigma_t| < k$. La deuxième partie de (5.1.9) est montrée, et l'assertion est établie. A présent de (5.1.8) on en déduit que $v = v_t$ sur ω, d'où

$$A = \int_\omega (\sigma_t.(\varphi - s) + k|\varphi - s|) dx'.$$

or $\sigma_t.(\varphi - s) \geq -|\sigma_t||\varphi - s|$, et puisque $|\sigma_t| \leq k$ sur ω, il s'ensuit que

$$\sigma_t.(\varphi - s) + k|\varphi - s| \geq 0 \quad sur \quad \omega.$$

Ceci montre que A est positif, et (5.2.8) devient

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\partial_j\left(\varphi_i - v_i\right)dx + \int_\omega k\left(|\varphi - s| - |v - s|\right)dx' \geq \int_\Omega f_i\left(\varphi_i - v_i\right)dx.$$

En remplaçant σ_{ij} par son expression (5.1.10) et en utilisant (5.1.1), nous obtenons l'inéquation variationnelle pour le champs des vitesses v:
Pour tout $\varphi \in V^q$

$$\int_\Omega 2\mu(\theta, v, |D(v)|)d_{ij}(v)\partial_j\left(\varphi_i - v_i\right)dx - \int_\Omega \pi div(\varphi)dx + \int_\omega k\left(|\varphi - s| - |v - s|\right)dx' \geq \int_\Omega f_i\left(\varphi_i - v_i\right)dx.$$

De manière similaire, en multipliant (5.1.2) par $\psi \in W^{1,p}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$ nous déduisons (5.2.2). □

Dans la suite de ce chapitre, nous aurons besoin des lemmes suivants:

Lemme 5.2.1. *Pour tout $u \in \left(W^{1,p}(\Omega)\right)^3$, on a*

$$\int_\Omega |D(u)|^2\,dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx. \tag{5.2.10}$$

Démonstration. Comme $p > 2$, $W^{1,p}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, ainsi il suffit de montrer (5.2.10) pour $u \in \left(H^1(\Omega)\right)^3$. On a

$$\int_\Omega |D(u)|^2\,dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\partial_j u_i \partial_j u_i + \partial_j u_i \partial_i u_j\right)dx = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_j u_i \partial_i u_j dx.$$

Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz au second terme dans le membre de droite, on écrit,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_j u_i \partial_i u_j dx &\leq \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^3 (\partial_j u_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i,j=1}^3 (\partial_i u_j)^2\right)^{\frac{1}{2}} dx \\ &\leq \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 (\partial_j u_i)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 (\partial_i u_j)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx,\end{aligned}$$

et l'inégalité (5.2.10) en résulte. □

Lemme 5.2.2. *Pour tout $u \in V_0^p$, on a*

$$\int_\Omega |D(u)|^2\,dx \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx. \tag{5.2.11}$$

Démonstration. Soit $u \in V_0^p \subset V^2_{\Gamma_L \cup \Gamma_1}$. Alors

$$\int_\Omega |D(u)|^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega \partial_j u_i \partial_i u_j dx.$$

En utilisant la formule de Green on obtient,

$$B := \int_\Omega \partial_j u_i \partial_i u_j dx = \int_{\partial\Omega} u_j n_i \partial_j u_i ds - \int_\Omega u_j \partial_i \left(\partial_j u_i\right) dx.$$

De la densité de $\left(C_0^\infty(\Omega)\right)^3$ dans $V^2_{\Gamma_L \cup \Gamma_1}$, $\partial_i \left(\partial_j u_i\right)$ existe et d'après le théorème de Schwarz $\partial_i \left(\partial_j u_i\right) = \partial_j \left(\partial_i u_i\right)$. D'où

$$\begin{aligned} B &= \int_{\partial\Omega} u_j n_i \partial_j u_i ds - \int_\Omega u_j \partial_j \left(\partial_i u_i\right) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} u_j n_i \partial_j u_i ds - \int_{\partial\Omega} u_j n_j \partial_i u_i ds + \int_\Omega \partial_j u_j \partial_i u_i dx. \end{aligned}$$

Puisque $u \in V_0^p$, $u = 0$ sur $\Gamma_L \cup \Gamma_1$ et $u.n = 0$ sur ω, alors

$$B = \int_\Omega \partial_j u_j \partial_i u_i dx + \int_\omega u_j n_i \partial_j u_i dx'.$$

Encore une fois de la condition $u.n = 0$ sur w, on en déduit que $\partial_j(u_i n_i) = 0$ et donc $n_i \partial_j u_i = -u_i \partial_j n_i = 0$ car $n = (0, 0, -1)$, d'où

$$B = \int_\Omega \left(div(u)\right)^2 dx.$$

De ceci on conclut que,

$$\int_\Omega |D(u)|^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega \left(div(u)\right)^2 dx \geq \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx.$$

□

5.3 Résultats d'existence

On suppose que la fonction μ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ est telle que

$$\exists \mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R}; \quad 0 < \mu_0 \leq \mu(t, u, s) \leq \mu_1, \quad \forall \, (t, u, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \tag{5.3.1}$$

$$la \quad fonction \quad s \mapsto \mu(.,.,s) \quad est \quad monotone \quad sur \quad \mathbb{R}_+. \tag{5.3.2}$$

5.3.1 Premier problème intermédiaire

De l'inéquation variationnelle (5.2.1), on obtient le problème intermédiaire suivant,

Problème 5.3.1. *Pour θ donnée dans $W^{1,q}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$ et $f \in (W^{1,p}(\Omega))^3$, on cherche $v \in V^p_{div}$ satisfaisant l'inéquation variationnelle suivante:*

$$a\left(\theta, v, \varphi - v\right) + j\left(\varphi\right) - j\left(v\right) \geq \left(f, \varphi - v\right), \quad \forall \varphi \in V^q_{div}. \tag{5.3.3}$$

la résolution de ce problème est basée sur la théorie des opérateurs non linéaires [18]. Définissons l'opérateur A suivant,

$$A : V^p_{\Gamma_1} \to (V^p_{\Gamma_1})' \quad by \quad \langle A(v), \varphi\rangle = a(\theta, v, \varphi), \tag{5.3.4}$$

où $\langle ., .\rangle$ est le crochet de dualité entre $(V^p_{\Gamma_1})'$ et $V^p_{\Gamma_1}$, et dénotons par $\Lambda_{V_{div}}$ la fonction caractéristique de V^p_{div},

$$\Lambda_{V_{div}}(u) = 0 \quad si \quad u \in V^p_{div}, \quad \text{et} \quad \Lambda_{V_{div}}(u) = +\infty \quad si \quad u \notin V^p_{div}.$$

L'inéquation variationnelle (5.3.3) devient alors: *Trouver $v \in V^p_{div}$*

$$\langle A(v), \varphi - v\rangle + j\left(\varphi\right) + \Lambda_{V_{div}}(\varphi) - j\left(v\right) - \Lambda_{V_{div}}(v) \geq \left(f, \varphi - v\right), \forall \varphi \in V^q_{\Gamma_1}. \tag{5.3.5}$$

Lemme 5.3.1. *L'opérateur A défini par (5.3.4) est borné, hémicontinu et monotone sur $V^p_{\Gamma_1}$.*

Démonstration. Pour tout $v \in V^p_{\Gamma_1}$ et $\varphi \in V^q_{\Gamma_1}$, on a

$$|\langle A(v), \varphi\rangle| = \left|\int_\Omega 2\mu\left(\theta, v, |D(v)|\right) d_{ij}(v)\partial_j\varphi_i dx\right| \leq 2\mu_1 \left|\int_\Omega d_{ij}(v)d_{ij}(\varphi)dx\right|,$$

en utilisant les inégalités de Hölder et Minkowski et (5.3.1), on obtient

$$\begin{aligned} |\langle A(v), \varphi\rangle| &\leq 2\mu_1 \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{3} |d_{ij}(v)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i,j=1}^{3} |d_{ij}\left(\varphi\right)|^q\right)^{\frac{1}{q}} dx \\ &\leq 2\mu_1 \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{3} |\partial_j v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i,j=1}^{3} |\partial_j\varphi_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} dx \end{aligned}$$

d'où pour tout $(v, \varphi) \in V^p_{\Gamma_1} \times V^q_{\Gamma_1}$,

$$|\langle A(v), \varphi\rangle| \leq 2\mu_1 \left(\int_\Omega |\nabla v|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq 2\mu_1 \left\|v\right\|_{1,p} \left\|\varphi\right\|_{1,q},$$

ce qui montre que A est borné.
Montrons que A est hémicontinu. Nous devons montrer que, pour tout $u, v, w \in V^p_{\Gamma_1}$, la fonction

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \alpha(t) = \langle A(u + tv), w\rangle$$

est continue. On a

$$\alpha(t) = \int_\Omega 2\mu\left(\theta, u + tv, |D(u + tv)|\right) D\left(u + tv\right) : D\left(w\right) dx.$$

La fonction

$$t \mapsto s(t) = 2\mu\left(\theta, u + tv, |D(u + tv)|\right) D\left(u + tv\right) : D\left(w\right)$$

est clairement continue sur $\mathbb{R}$. Soit (t_n) une suite convergente vers t dans $\mathbb{R}$. Alors $s_n := s(t_n) \in L^1(\Omega)$ et (s_n) converge vers $s(t)$ quand n tend vers $+\infty$.
La suite (t_n) étant bornée, d'où il existe $M > 0$ tel que $|t_n| < M, \forall n \geq 0$.
Ainsi,

$$|s_n| \leq g := 2\mu_1\left(|D\left(u\right)| \left|D\left(w\right)\right| + M\left|D\left(v\right)\right| \left|D\left(w\right)\right|\right).$$

Comme $g \in L^1(\Omega)$ et est positive, par le théorème de la convergence dominée, on en déduit que $s(t) \in L^1(\Omega)$ et

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega s_n dx = \int_\Omega s(t) dx,$$

c-à-d

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \alpha\left(t_n\right) = \alpha\left(t\right).$$

L'opérateur A est donc hémicontinu. Pour la monotonie de A, on doit établir que,

$$\left\langle A\left(u\right) - A\left(v\right), u - v\right\rangle \geq 0, \quad \forall u, v \in V^p_{\Gamma_1}.$$

On a

$$\left\langle A\left(u\right) - A\left(v\right), u - v\right\rangle = 2\int_\Omega \left[\mu\left(\theta, u, \left|D\left(u\right)\right|\right) d_{ij}\left(u\right) - \mu\left(\theta, v, \left|D\left(v\right)\right|\right) d_{ij}\left(v\right)\right] \partial_j\left(u_i - v_i\right) dx,$$

i.e.

$$\begin{aligned}\left\langle A\left(u\right) - A\left(v\right), u - v\right\rangle &= \int_\Omega 2\mu\left(\theta, u, \left|D\left(u\right)\right|\right) d_{ij}\left(u\right) \partial_j u_i dx + \int_\Omega 2\mu\left(\theta, v, \left|D\left(v\right)\right|\right) d_{ij}\left(v\right) \partial_j v_i dx \\ &- \int_\Omega 2\mu\left(\theta, u, \left|D\left(u\right)\right|\right) d_{ij}\left(u\right) \partial_j v_i dx - \int_\Omega 2\mu\left(\theta, v, \left|D\left(v\right)\right|\right) d_{ij}\left(v\right) \partial_j u_i dx.\end{aligned}$$

Du fait que

$$d_{ij}\left(u\right) \partial_j v_i = d_{ij}\left(u\right) d_{ij}\left(v\right) = D\left(u\right) : D\left(v\right) \leq \left|D\left(u\right)\right| \left|D\left(v\right)\right|$$

on obtient

$$\begin{aligned}\left\langle A\left(u\right) - A\left(v\right), u - v\right\rangle &\geq \int_\Omega 2\mu\left(\theta, u, \left|D\left(u\right)\right|\right) \left|D\left(u\right)\right|^2 dx + \int_\Omega 2\mu\left(\theta, v, \left|D\left(v\right)\right|\right) \left|D\left(v\right)\right|^2 dx \\ &- 2\int_\Omega \left(\mu\left(\theta, u, \left|D\left(u\right)\right|\right) + \mu\left(\theta, v, \left|D\left(v\right)\right|\right)\right) \left|D\left(u\right)\right| \left|D\left(v\right)\right| dx,\end{aligned}$$

maintenant puisque, $2\left|D\left(u\right)\right|\left|D\left(v\right)\right| \leq \left|D\left(u\right)\right|^2 + \left|D\left(v\right)\right|^2$, on a

$$\left\langle A\left(u\right)-A\left(v\right),u-v\right\rangle \geq \int_\Omega \left(\mu\left(\theta,u,\left|D\left(u\right)\right|\right)-\mu\left(\theta,v,\left|D\left(v\right)\right|\right)\right)\left(\left|D\left(u\right)\right|^2-\left|D\left(v\right)\right|^2\right)dx.$$

En utilisant (5.3.2), on en déduit que

$$\left\langle A\left(u\right)-A\left(v\right),u-v\right\rangle \geq 0 \quad \forall u,v\in u,v\in V^p_{\Gamma_1},$$

ainsi A est monotone. □

On donne à présent un résultat d'existence pour le problème 5.3.1.

Théorème 5.3.1. *On suppose que (5.3.1) et (5.3.2) sont satisfaites, $f\in(W^{1,p}(\Omega))^3$ et $0\leq k\in L^p(\omega)$, alors pour θ fixée dans $W^{1,q}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$, il existe $v_\theta\in V^p_{div}$ solution de (5.3.3).*

Démonstration. Du lemme 5.3.1, on conclut que l'opérateur A est pseudo-monotone. La fonction $v\mapsto j\left(v\right)+\Lambda_{V_{div}}(v)$ est convexe, propre et semi-continue inférieurement. Reste à vérifier que A est coercif, c-à-d

$$\exists v^*\in V^p_{\Gamma_1} \quad tel \quad que \quad j\left(v^*\right)+\Lambda_{V_{div}}(v^*)<+\infty$$

et

$$\lim_{\|v\|_{1,p}\to+\infty}\frac{\langle A(v),v-v^*\rangle+j\left(v\right)+\Lambda_{V_{div}}(v)}{\|v\|_{1,p}}=+\infty.$$

Prenons $v^*=G$, et remarquons, à partir de leurs expressions explicites, que

$$si \lim_{\|v\|_{1,p}\to\infty}\frac{\langle A(v-G),v-G\rangle}{\|v\|_{1,p}}=+\infty \; alors \lim_{\|v\|_{1,p}\to\infty}\frac{\langle A(v),v-G\rangle}{\|v\|_{1,p}}=+\infty. \tag{5.3.6}$$

En effet

$$\begin{aligned}\langle A(v-G),v-G\rangle &= 2\int_\Omega \mu(\theta,v-G,|D(v-G)|)\left(|D(v)|^2-2D(v):D(G)\right)dx\\ &+ 2\int_\Omega \mu(\theta,v-G,|D(v-G)|)\left|D(G)\right|^2dx,\end{aligned}$$

et

$$\langle A(v),v-G\rangle = 2\int_\Omega \mu(\theta,v,|D(v)|)\left(|D(v)|^2-D(v):D(G)\right)dx.$$

Maintenant puisque la fonction μ est positive et bornée sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+$ et $\|G\|^2_{1,2}\|v\|^{-1}_{1,p}\to 0$ quand $\|v\|_{1,p}\to\infty$, l'assertion (5.3.6) s'ensuit. Ainsi, pour $\|v\|_{1,p}$ assez grand, on peut utiliser $\langle A(v-G),v-G\rangle$ à la place de $\langle A(v),v-G\rangle$.
Pour $v\in V^p_{\Gamma_1}$, de la positivité de la fonction $j+\Lambda_{V_{div}}$ et (5.3.1) on obtient

$$\langle A(v-G),v-G\rangle+j\left(v\right)+\Lambda_{V_{div}}(v)\geq 2\mu_0\int_\Omega |D(v-G)|^2dx.$$

On a $v - G \in V_0^p$, d'où du lemme 5.2.2 on écrit

$$\langle A(v-G), v-G\rangle + j\,(v) + \Lambda_{V_{div}}(v) \geq \mu_0 \left\|v-G\right\|_{1,2}^2$$

et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\mu_0 \left\|v-G\right\|_{1,2}^2 \geq \mu_0 \left\|v\right\|_{1,2}^2 - 2\mu_0 \left\|v\right\|_{1,2} \left\|G\right\|_{1,2} + \mu_0 \left\|G\right\|_{1,2}^2,$$

ainsi on obtient,

$$\frac{\langle A(v-G), v-G\rangle + j(v) + \Lambda_{V_{div}}(v)}{\|v\|_{1,p}} \geq \mu_0 \left(\frac{\|v\|_{1,2}^2 - 2\|G\|_{1,2}\|v\|_{1,2} + \|G\|_{1,2}^2}{\|v\|_{1,p}} \right) \tag{5.3.7}$$

De la continuité de l'injection $V_{\Gamma_1}^p \subset V_{\Gamma_1}^2$, on en déduit qu'il existe une constante $c > 0$ dépendant seulement de Ω et p telle que $\left\|v\right\|_{1,2} \leq c \left\|v\right\|_{1,p}$. En faisant tendre $\left\|v\right\|_{1,2}$ vers ∞, alors $\left\|v\right\|_{1,p} \to \infty$ et on a

$$\lim_{\|v\|_{1,2}\to+\infty} \frac{\left\|v\right\|_{1,2}}{\left\|v\right\|_{1,p}} \neq 0, \tag{5.3.8}$$

en effet, pour $v \in V_{\Gamma_1}^p$ et $v \neq 0$, en posant $w = v \left\|v\right\|_{1,p}^{-1}$ alors

$$\left\|w\right\|_{1,p} = 1. \tag{5.3.9}$$

Mais

$$\lim_{\|v\|_{1,2}\to+\infty} \frac{\left\|v\right\|_{1,2}}{\left\|v\right\|_{1,p}} = 0 \Longrightarrow \lim_{\|v\|_{1,2}\to+\infty} \left\|w\right\|_{1,2} = 0.$$

C'est une contradiction avec (5.3.9), ainsi (5.3.8) en résulte. Maintenant en faisant $\left\|v\right\|_{1,2} \to \infty$, alors $\left\|v\right\|_{1,p} \to \infty$ et on peut déduire grâce à (5.3.8), que le membre de droite de (5.3.7) tend vers $+\infty$, et par conséquent

$$\frac{\langle A(v-G), v-G\rangle + j\,(v) + \Lambda_{V_{div}}(v)}{\left\|v\right\|_{1,p}} \to +\infty.$$

D'où de (5.3.6),

$$\frac{\langle A(v), v-G\rangle + j\,(v) + \Lambda_{V_{div}}(v)}{\left\|v\right\|_{1,p}} \to +\infty.$$

L'opérateur A est donc coercif. Par application du théorème 8.5 chap. 2 dans [18], on conclut que (5.3.5) a une solution et par suite (5.3.3) admet une solution v_θ dans l'espace V_{div}^p. □

Avant d'établir le résultat d'existence de la pression, on montre le lemme suivant.

Lemme 5.3.2. *La solution v_θ du problème 5.3.1 est bornée dans V_{div}^p indépendamment de la température θ.*

Démonstration. Comme v_θ vérifie l'inéquation variationnelle suivante,

$$a(\theta, v_\theta, \varphi - v_\theta) + j(\varphi) - j(v_\theta) \geq (f, \varphi - v_\theta), \quad \forall \varphi \in V^q_{div},$$

en prenant $\varphi = G \in V^p_{div} \subset V^q_{div}$, on obtient

$$\langle A(v_\theta), v_\theta - G\rangle \leq (f, v_\theta) - (f, G) + j(G), \tag{5.3.10}$$

car j est positive. Remarquons que nous pouvons écrire,

$$\begin{aligned}\langle A(v_\theta), v_\theta - G\rangle &= 2\int_\Omega \mu(\theta, v_\theta, |D(v_\theta)|) d_{ij}(v_\theta - G)\partial_j(v^i_\theta - G_i)dx \\ &+ 2\int_\Omega \mu(\theta, v_\theta, |D(v_\theta)|) d_{ij}(G)\partial_j(v^i_\theta - G_i)dx,\end{aligned}$$

où v^i_θ est i ème composante de v_θ. Ainsi

$$\begin{aligned}\langle A(v_\theta), v_\theta - G\rangle &= 2\int_\Omega \mu(\theta, v_\theta, |D(v_\theta)|)\left(|D(v_\theta - G)|^2 + D(G) : D(v_\theta)\right) dx \\ &- 2\int_\Omega \mu(\theta, v_\theta, |D(v_\theta)|)\,|D(G)|^2\, dx.\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

Maintenant de (5.3.1), (5.3.10) et (5.3.11) et d'après les lemmes 5.2.2 et 5.2.1 et l'inégalité de Hölder nous obtenons,

$$\begin{aligned}\mu_0 \|v_\theta - G\|^2_{1,2} &\leq 2\mu_1 \|v_\theta\|_{1,2} \|G\|_{1,2} + \|f\|_{W^{1,p}} \|v_\theta\|_{1,q} \\ &+ 2\mu_1 \|G\|^2_{1,2} + \|f\|_{W^{1,p}} \|G\|_{1,q} + j(G),\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mu_0 \|v_\theta\|^2_{1,2} \leq 2(\mu_0 + \mu_1)\|v_\theta\|_{1,2}\|G\|_{1,2} &+ \|f\|_{W^{1,p}} \|v_\theta\|_{1,q} + 2\mu_1 \|G\|^2_{1,2} \\ &+ \|f\|_{W^{1,p}} \|G\|_{1,q} + j(G).\end{aligned} \tag{5.3.12}$$

Comme l'injection $V^2_{\Gamma_1} \subset V^q_{\Gamma_1}$ est continue, il existe une constante positive β telle que,

$$\|v_\theta\|_{1,q} \leq \beta \|v_\theta\|_{1,2}.$$

Ainsi (5.3.12) devient,

$$\begin{aligned}\mu_0 \|v_\theta\|^2_{1,2} \leq 2(\mu_0 + \mu_1)\|v_\theta\|_{1,2}\|G\|_{1,2} &+ \beta\|f\|_{W^{1,p}} \|v_\theta\|_{1,2} + 2\mu_1 \|G\|^2_{1,2} \\ &+ \|f\|_{W^{1,p}} \|G\|_{1,q} + j(G).\end{aligned} \tag{5.3.13}$$

De (5.3.13) nous déduisons qu'il existe une constante positive C indépendante de θ telle que

$$\|v_\theta\|_{1,2} \leq C. \tag{5.3.14}$$

En effet, dans le cas contraire, en divisant les deux membres de (5.3.13) par $\|v_\theta\|_{1,2}^2$ et en faisant $\|v_\theta\|_{1,2} \to +\infty$ nous arrivons à $\mu_0 \leq 0$. Ce qui est en contradiction avec le fait que $\mu_0 > 0$, ainsi nous avons bien (5.3.14).

De (5.3.8), $\|v_\theta\|_{1,2}^{-1} \|v_\theta\|_{1,p}$ est bornée pour $\|v_\theta\|_{1,2}$ assez grand, il s'ensuit donc de (5.3.14), l'existence d'une constante positive C' indépendante de θ telle que

$$\|v_\theta\|_{1,p} \leq C'. \tag{5.3.15}$$

Le lemme est prouvé. □

Théorème 5.3.2. *Si les hypothèses du Théorème 5.3.1 sont vérifiées, alors il existe un unique $\pi \in L_0^p(\Omega)$ satisfaisant l'équation (5.2.1).*

Démonstration. Soit v_θ la solution de (5.3.3). En prenant $\varphi = v_\theta \pm \phi$, pour ϕ variant dans $V_{0,div}^q$, on obtient de (5.3.3) l'équation variationnelle suivante,

$$a(\theta, v_\theta, \phi) = (f, \phi), \quad \forall \phi \in V_{0,div}^q. \tag{5.3.16}$$

Considérons la forme linéaire F définie sur V_0^q par,

$$F(\phi) = a(\theta, v_\theta, \phi) - (f, \phi).$$

Montrons que F est continue sur V_0^q. Pour tout ϕ dans V_0^q on a

$$|F(\phi)| \leq 2|\Omega|^{\frac{p-2}{p}} \mu_1 \|v_\theta\|_{1,p} \|\phi\|_{1,p} + |\Omega|^{\frac{p-2}{p}} \|f\|_{1,p} \|\phi\|_{1,q},$$

du lemme 5.3.2 on a (5.3.15) d'où

$$|F(\phi)| \leq |\Omega|^{\frac{p-2}{p}} \left(2\mu_1 C' + \|f\|_{1,p}\right) \|\phi\|_{1,q}.$$

Ceci montre que F est continue, et $F \in W^{-1,p}(\Omega)$. Et puisque

$$F(\phi) = 0, \quad \forall \phi \in V_{0,div}^q,$$

le théorème de De Rham (voir [1] page 116), nous assure l'existence d'un unique $\pi \in L_0^p(\Omega)$ tel que,

$$F(\phi) = \langle \nabla \pi, \phi \rangle \quad \forall \phi \in V_0^q,$$

et en utilisant la formule de Green nous obtenons,

$$2div\left(\mu(\theta, v_\theta, |D(v_\theta)|) D(v_\theta)\right) + f = \nabla \pi.$$

Multiplions cette égalité par $\varphi \in V^q$ et utilisons encore une fois la formule de Green, nous déduisons que $(v_\theta, \pi) \in V_{div}^p \times L_0^p(\Omega)$ satisfait (5.2.1). □

5.3.2 Second problème intermédiaire

Rappelons que la température satisfait l'équation variationnelle (5.2.2) avec (5.2.3) et (5.2.4). Supposons que la fonction K est telle que,

$$\exists k_0, k_1 \in \mathbb{R}; \quad 0 < k_0 \le K(x) \le k_1, \quad \forall x \in \Omega. \tag{5.3.17}$$

On prend $p \ge 4$ et on cherche la solution θ dans le sous-espace $H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ de $W^{1,q}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$, ce choix sera justifié dans la démonstration du Théorème 5.3.4. On considère le problème suivant relatif à la température.

Problème 5.3.2. *Pour v donnée dans V^p_{div}, trouver $\theta \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ solution de l'équation,*

$$B(\theta, \psi) = L(\theta, \psi), \quad \forall \psi \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega). \tag{5.3.18}$$

Remarquons que, d'après (5.2.3), L dépend de v. Pour étudier ce problème non linéaire, on considère le problème linéarisé correspondant suivant:

Problème 5.3.3. *Pour v donnée V^p_{div} et $\eta \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$, trouver $\theta \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ solution de l'équation,*

$$B(\theta, \psi) = L(\eta, \psi), \quad \forall \psi \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega). \tag{5.3.19}$$

Théorème 5.3.3. *On suppose que $p \ge 4$ et que (5.3.17) et les hypothèses du Théorème 5.3.1 sont vérifiées. Alors pour $\eta \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega), v \in V^p_{div}, \theta_\omega \in L^2(\omega)$ et $r \in L^\infty(\mathbb{R})$, il existe un unique $\theta \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ solution de (5.3.19).*

Démonstration. La forme bilinéaire B est continue sur $H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega) \times H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$. En effet, de (5.3.17) et puisque $v \in V^p_{div} \subset (L^\infty(\Omega))^3$, il existe $M > 0$ tel que

$$|B(\theta, \psi)| \le k_1 \|\theta\|_{1,2} \|\psi\|_{1,2} + M \|\theta\|_{1,2} \|\psi\|_2 .$$

De l'inégalité de Poincaré, il existe une constante positive C telle que,

$$|B(\theta, \psi)| \le (k_1 + MC) \|\theta\|_{1,2} \|\psi\|_{1,2} .$$

La forme B est donc continue. Montrons qu'elle est coercive. On a, pour tout $\theta \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$,

$$B(\theta, \theta) = \int_\Omega K(x) |\nabla \theta|^2 dx + \int_\Omega \theta v_i \partial_i \theta dx \ge k_0 \int_\Omega |\nabla \theta|^2 dx + \int_\Omega \frac{1}{2} v_i \partial_i (\theta^2) dx.$$

De la formule de Green, on obtient,

$$\vartheta := \int_\Omega v_i \partial_i (\theta^2) dx = \int_{\partial\Omega} \theta^2 v_i n_i ds - \int_\Omega \theta^2 \partial_i v_i dx. \tag{5.3.20}$$

Puisque $\theta = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_L$, $n.v = 0$ sur ω et $div(v) = 0$ dans Ω on en déduit que $\vartheta = 0$, et par suite

$$B(\theta, \theta) \ge k_0 \|\theta\|^2_{1,2}, \quad \forall \theta \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega).$$

Ainsi B est coercive. Montrons à présent que la forme linéaire $L(\eta, .)$ est continue sur $H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$. Soit $\psi \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$, l'injection $H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega) \subset L^2(\omega)$ étant continue, d'où

$$|L(\eta, \psi)| \leq 2\mu_1 \int_\Omega |D(v)|^2 |\psi| \, dx + C \int_\Omega |\psi| \, dx + \int_\omega |\theta_\omega| \, |\psi| \, dx',$$

et des inégalités de Hölder et de Poincaré, on obtient

$$|L(\eta, \psi)| \leq \left[2\mu_1 C_1 |\Omega|^{\frac{p-4}{2p}} \|D(v)\|_p^2 + C_2 |\Omega|^{\frac{1}{2}} + C_3 \|\theta_\omega\|_{L^2(\omega)} \right] \|\psi\|_{1,2},$$

comme $p \geq 4$, ceci montre que $L(\eta, .)$ est continue, et d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $\theta \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ solution du problème linéarisé 5.3.3. $\square$

Dans le théorème suivant on montre que le problème intermédiaire 5.3.2 admet au moins une solution.

Théorème 5.3.4. *Soit $\theta_\omega \in L^2(\omega)$ et $r \in L^\infty(\mathbb{R})$. On suppose que les fonctions r et $t \mapsto \mu(t, ., .)$ sont Lipschitziennes. Alors avec les mêmes hypothèses du Théorème 5.3.3, il existe au moins un élément $\theta \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ solution du Problème 5.3.2.*

Démonstration. Pour $\eta \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$, le Théorème 5.3.3 nous assure l'existence et l'unicité de $\theta \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ solution de l'équation (5.3.19) dans le problème linéarisé 5.3.3. On peut alors définir l'opérateur:

$$\begin{array}{rcl} T : H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega) & \to & H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega) \\ \eta & \mapsto & T(\eta) = \theta, \end{array} \tag{5.3.21}$$

où θ est l'unique solution du problème linéarisé 5.3.3. Nous allons établir que T est complètement continu. A η_1 (resp. η_2) de $H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$, on fait associer $T(\eta_1)$ (resp. $T(\eta_2)$), la solution de l'équation (5.3.19). Par soustraction on obtient,

$$B(T(\eta_1) - T(\eta_2), \psi) = L(\eta_1, \psi) - L(\eta_2, \psi), \quad \forall \psi \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega). \tag{5.3.22}$$

En prenant $\psi = T(\eta_1) - T(\eta_2)$ dans (5.3.22), il vient

$$\int_\Omega K(x) |\nabla (T(\eta_1) - T(\eta_2))|^2 \, dx + P = Q + R, \tag{5.3.23}$$

où

$$\begin{array}{rcl} P & = & \displaystyle\int_\Omega (T(\eta_1) - T(\eta_2)) \, v_i \partial_i (T(\eta_1) - T(\eta_2)) \, dx, \\ Q & = & 2 \displaystyle\int_\Omega [\mu(\eta_1, v, |D(v)|) - \mu(\eta_2, v, |D(v)|)] [T(\eta_1) - T(\eta_2)] |D(v)|^2 \, dx, \end{array}$$

et

$$R = \int_\Omega [r(\eta_1) - r(\eta_2)] [T(\eta_1) - T(\eta_2)] \, dx.$$

Évaluons les termes P, Q et R. Par utilisation des mêmes arguments que celles utilisés dans (5.3.20) nous avons,

$$P = \frac{1}{2}\int_\Omega v_i\partial_i\left[(T(\eta_1)-T(\eta_2))^2\right]dx = \frac{1}{2}\int_\Omega v_i\partial_i\left[(\theta_1-\theta_2)^2\right]dx = 0. \quad (5.3.24)$$

Concernant le terme Q on écrit,

$$|Q| \leq 2C_\mu \int_\Omega |\eta_1-\eta_2|\,|T(\eta_1)-T(\eta_2)|\,|D(v)|^2\,dx, \quad (5.3.25)$$

où C_μ est la constante de Lipschitz de la fonction $t \mapsto \mu(t,.,.)$.

A noter ici que si nous avons pris θ et η dans $W^{1,q}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$, l'intégrant dans (5.3.25) ne serait pas nécessairement dans $L^1(\Omega)$, c'est pourquoi nous avons choisi $H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$ à la place de $W^{1,q}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$.

Ceci étant, on sait du théorème de Rellich-Kondrachov que l'injection de $H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$ dans $L^4(\Omega)$ est compacte, d'où en prenant η_i et $T(\eta_i)$ dans $L^4(\Omega)$ on obtient

$$|Q| \leq 2\,|\Omega|^{\frac{p-4}{2p}}\,C_\mu\,\|\eta_1-\eta_2\|_4\,\|T(\eta_1)-T(\eta_2)\|_4\,\|D(v)\|_p^2\,.$$

Toujours de l'injection $H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, il existe une constante positive C' dépendant seulement de Ω telle que,

$$|Q| \leq 2\,|\Omega|^{\frac{p-4}{2p}}\,C_\mu C'\,\|\eta_1-\eta_2\|_{1,2}\,\|T(\eta_1)-T(\eta_2)\|_{1,2}\,\|D(v)\|_p^2\,. \quad (5.3.26)$$

Finalement des inégalités de Hölder et Poincaré, on a

$$\begin{aligned} |R| &\leq C_r\,\|\eta_1-\eta_2\|_2\,\|T(\eta_1)-T(\eta_2)\|_2 \quad (5.3.27)\\ &\leq C_P C_r\,\|\eta_1-\eta_2\|_{1,2}\,\|T(\eta_1)-T(\eta_2)\|_{1,2}\,, \end{aligned}$$

où C_P et C_r désignent respectivement les constantes de Poincaré et Lipschitz de la fonction r. En se servant des relations (5.3.17), (5.3.23), (5.3.24), (5.3.26) et (5.3.27) on obtient

$$k_0\,\|T(\eta_1)-T(\eta_2)\|_{1,2}^2 \leq \left(2\,|\Omega|^{\frac{p-4}{2p}}\,C_\mu C'\,\|D(v)\|_p^2 + C_P C_r\right)\|\eta_1-\eta_2\|_{1,2}\,\|T(\eta_1)-T(\eta_2)\|_{1,2}\,,$$

et par suite

$$k_0\,\|T(\eta_1)-T(\eta_2)\|_{1,2} \leq \left(2\,|\Omega|^{\frac{p-4}{2p}}\,C_\mu C'\,\|D(v)\|_p^2 + C_P C_r\right)\|\eta_1-\eta_2\|_{1,2}\,.$$

Ainsi l'opérateur T est Lipschitzien. Il reste à montrer que T est borné dans $H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$. On sait que pour $\eta \in H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$, $T(\eta)$ est la solution de (5.3.19), c-à-d

$$B(T(\eta),\psi) = L(\eta,\psi), \quad \forall\psi \in H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)\,.$$

En posant $\psi = T(\eta)$, et utilisation de (5.3.2) et (5.3.17), résulte

$$k_0 \int_\Omega |\nabla T(\eta)|^2 dx \le 2\mu_1 \int_\Omega |D(v)|^2 |T(\eta)| dx + r_1 \int_\Omega |T(\eta)| dx + \int_\omega |\theta_\omega| |T(\eta)| dx,$$

où $r_1 = \text{ess sup}\{r(t), t \in \mathbb{R}\}$. L'injection $H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega) \subset L^2(\omega)$ étant continue, il existe alors une constante positive C'' indépendante de η telle que

$$\|T(\eta)\|_{L^2(\omega)} \le C'' \|T(\eta)\|_{1,2},$$

et des inégalités de Hölder et Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned} k_0 \|T(\eta)\|^2_{1,2} &\le 2|\Omega|^{\frac{p-4}{2p}} \mu_1 C_p \|D(v)\|^2_p \|T(\eta)\|_{1,2} \\ &+ r_1 C_p \|T(\eta)\|_{1,2} + C'' \|\theta_\omega\|_{L^2(\omega)} \|T(\eta)\|_{1,2}. \end{aligned} \tag{5.3.28}$$

Ainsi, à partir de (5.3.28), l'opérateur T est borné, $\|T(\eta)\|_{1,2} \le C^*$, avec

$$C^* = k_0^{-1}\left(2|\Omega|^{\frac{p-4}{2p}} \mu_1 C_p \|D(v)\|^2_p + C'' \|\theta_\omega\|_{L^2(\omega)} + C_p r_1\right).$$

Pour conclure, d'après le théorème du point fixe de Schauder, on en déduit que l'opérateur T admet au moins un point fixe $\theta \in H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$, solution du Problème 5.3.2 c-à-d solution de l'équation (5.3.18). □

Dans le théorème suivant, on établira l'unicité de la solution du Problème 5.3.2.

Théorème 5.3.5. *Soit $\theta_\omega \in L^2(\omega)$ et $r \in L^\infty(\mathbb{R})$. Supposons que les fonctions r et $t \mapsto \mu(t,.,.)$ sont Lipschitziennes et non croissantes. Alors avec les mêmes hypothèses du Théorème 5.3.3, la solution du Problème 5.3.2 est unique.*

Démonstration. En effet, supposons au contraire que le Problème 5.3.2 admet deux solutions θ_1 et θ_2. En soustrayant, nous obtenons pour tout $\psi \in H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega K(x)\nabla\Theta.\nabla\psi dx + \int_\Omega \psi v_i \partial_i \Theta dx &= 2\int_\Omega [\mu(\theta_1, v, |D(v)|) - \mu(\theta_2, v, |D(v)|)] |D(v)|^2 \psi dx \\ &+ \int_\Omega (r(\theta_1) - r(\theta_2)) \psi dx, \end{aligned} \tag{5.3.29}$$

avec $\Theta = \theta_1 - \theta_2$. Utilisons à ce niveau la fonction réelle f_δ (voir [10,14]) définie pour $\delta > 0$ par

$$f_\delta(t) = \begin{cases} (1 - \frac{\delta}{t})^+ & si \quad t > 0, \\ 0 & si \quad t \le 0, \end{cases}$$

avec, si a est un nombre réel, $a^+ = \max(a, 0)$. Comme $\Theta \in H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$ alors $f_\delta(\Theta) \in H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$ et

$$\nabla f_\delta(\Theta) = \frac{\delta}{\Theta^2}\chi_{[\Theta>\delta]}\nabla\Theta,$$

ici $\chi_{[\Theta>\delta]}$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble $[\Theta > \delta] = \{x \in \Omega, \quad \Theta(x) > \delta\}$, c-à-d

$$\chi_{[\Theta>\delta]}(x) = 1 \quad si \quad \Theta(x) > \delta, \quad \chi_{[\Theta>\delta]}(x) = 0 \quad si \quad \Theta(x) \leq \delta.$$

Sachant que $\psi = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_L$, $v.n = 0$ sur ω et $div(v) = 0$ dans Ω, alors

$$\int_\Omega \psi v_i \partial_i \Theta dx = -\int_\Omega \Theta v.\nabla\psi dx. \tag{5.3.30}$$

En prenant $\psi = f_\delta(\Theta)$ dans (5.3.29) et en utilisant (5.3.30) nous obtenons

$$\begin{aligned} \delta \int_{\Omega\cap[\Theta>\delta]} K(x) \left|\frac{\nabla\Theta}{\Theta}\right|^2 dx &= 2\int_{\Omega\cap[\Theta>\delta]} \frac{\mu(\theta_1, v, |D(v)|) - \mu(\theta_2, v, |D(v)|)}{\theta_1 - \theta_2} |D(v)|^2 (\Theta - \delta)\, dx \\ &+ \int_{\Omega\cap[\Theta>\delta]} \frac{r(\theta_1) - r(\theta_2)}{\theta_1 - \theta_2} (\Theta - \delta)\, dx + \delta \int_{\Omega\cap[\Theta>\delta]} v\frac{\nabla\Theta}{\Theta} dx. \quad (5.3.31) \end{aligned}$$

Les fonctions r et $t \mapsto \mu(t, ., .)$ étant non croissantes, il vient

$$\frac{\mu(\theta_1, v, |D(v)|) - \mu(\theta_2, v, |D(v)|)}{\theta_1 - \theta_2} \leq 0, \quad \text{et} \quad \frac{r(\theta_1) - r(\theta_2)}{\theta_1 - \theta_2} \leq 0. \tag{5.3.32}$$

Rappelons que $v \in V_{div}^p \subset (L^\infty(\Omega))^3$, il existe alors une constante positive M indépendante de δ telle que,

$$\int_{\Omega\cap[\Theta>\delta]} v\frac{\nabla\Theta}{\Theta} dx \leq M \int_{\Omega\cap[\Theta>\delta]} \left|\frac{\nabla\Theta}{\Theta}\right| dx.$$

Et des relations (5.3.17), (5.3.32) et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, (5.3.31) devient,

$$k_0 \int_{\Omega\cap[\Theta>\delta]} \left|\frac{\nabla\Theta}{\Theta}\right|^2 dx \leq M \int_{\Omega\cap[\Theta>\delta]} \left|\frac{\nabla\Theta}{\Theta}\right| dx \leq M |\Omega|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega\cap[\Theta>\delta]} \left|\frac{\nabla\Theta}{\Theta}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega \left|\nabla \ln\left(1 + \frac{(\Theta-\delta)^+}{\delta}\right)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_{\Omega\cap[\Theta>\delta]} \left|\frac{\nabla\Theta}{\Theta}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M k_0^{-1} |\Omega|^{\frac{1}{2}}. \quad (5.3.33) \end{aligned}$$

Le membre de droite de (5.3.33) est indépendant de δ, d'où pour $\delta \to 0$ on obtient, $\Theta = \theta_1 - \theta_2 \leq 0$ p.p. dans Ω, et en permutant les rôles θ_1 et θ_2 nous arrivons à $\theta_2 - \theta_1 \leq 0$ d'où $\theta_1 = \theta_2$. Ainsi l'unicité de la température est établie. $\square$

5.3.3 Résultat d'existence pour le problème couplé

Nous rappelons ici les hypothèses nécessaires pour assurer l'existence d'au moins une solution pour Problème 5.2.1.

On suppose que, l'exposant $p \geq 4$, la fonction μ satisfait (5.3.1) et (5.3.2), la fonction K vérifie (5.3.17), le vecteur de la force extérieure $f \in (W^{1,p}(\Omega))^3$, le seuil limite k de l'effort est tel que $0 \leq k \in L^p(\omega)$, le flux θ_ω fixé sur ω est dans $L^2(\omega)$ et la fonction réelle $r \in L^\infty(\mathbb{R})$. On suppose en plus que les fonctions r et $t \mapsto \mu(t, ., .)$ sont Lipschitziennes et non croissantes.

Théorème 5.3.6. *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe un unique $\theta \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ solution du Problème 5.3.2 et il existe au moins un couple $(v_\theta, \pi_\theta) \in V^p_{div} \times L^p_0(\Omega)$ vérifiant l'inéquation variationnelle (5.2.1).*

Démonstration. Pour tout $\eta \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega) \subset W^{1,q}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$, car $1 < q < 2$, les Théorèmes 5.3.1 et 5.3.2 nous assurent, respectivement, l'existence de $v = v_\eta$ dans V^p_{div} et l'existence d'un seul $\pi = \pi_\eta$ dans $L^p_0(\Omega)$, satisfaisant l'inéquation variationnelle

$$a(\eta, v_\eta, \varphi - v_\eta) - (\pi_\eta, div(\varphi)) + j(\varphi) - j(v_\eta) \geq (f, \varphi - v_\eta) \quad \forall \varphi \in V^q, \tag{5.3.34}$$

et d'après les Théorèmes 5.3.4-5.3.5, il existe un seul $\theta \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$, solution du Problème 5.3.2. Nous pouvons donc utiliser l'opérateur T défini par (5.3.21). D'après le Théorème 5.3.4, l'opérateur T admet au moins un point fixe $\theta \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$, $\theta = T(\theta)$, qui est solution du Problème 5.3.2. D'où $(\theta, v_\theta, \pi_\theta)$ est solution du Problème 5.2.1. □

Remarque 5.3.1. *A notre connaissance, l'unicité du Problème 5.2.1 reste une question ouverte.*

Références

[1] C. Amrouche, V. Girault, Decomposition of vector spaces and application to the Stokes problem in arbitrary dimension. Czechoslovak Mathematical Journal, 44 (119) (1994), Praha 119-140.

[2] G. Bayada, M. Boukrouche, On a free boundary problem for Reynolds equation derived from the Stokes system with Tresca boundary conditions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 282(1), (2003) 212-231.

[3] F. Boughanim, M. Boukrouche, H. Smaoui, Asymptotic behavior of a non-Newtonian flow with stick-slip condition. Electronic Journal of Differential Equations, Conference 11 (2004) 71-80.

[4] F. Boughanim, R. Tapiéro, Derivation of the two-dimensional Carreau law for a quasi-Newtonian fluid flow through a thin slab. Applicable Analysis: An International Journal, Vol. 57(3), (1995) 243-269.

[5] M. Boukrouche, A brief survey on lubrication problems with nonlinear boundary conditions. MAT. Serie A: Mathematical Conferences, Seminars and Papers, (Universidad Austral, Facultad de Ciencias Empresariales Departamento de Matemática, Rosario), 16 (2009).

[6] M. Boukrouche, R. El Mir, Asymptotic analysis of a non-Newtonian fluid in a thin domain with Tresca law. Nonlinear Analysis, Theory Methods and Applications, Vol. 59(1-2), (2004) 85-105.

[7] M. Boukrouche, R. El Mir, On the Navier-Stokes system in a thin film flow with Tresca free boundary condition and its asymptotic behavior. Bull. Math. Soc. Sc. Math. Roumanie, Tome 48 (96) (2), (2005) 139-163.

[8] M. Boukrouche, R. El Mir, Non-isothermal, non-Newtonian lubrication problem with Tresca fluid-solid law. Existence and asymptotic of weak solutions. Nonlinear Analysis, Real World Applications, Vol. 9 (2), (2008) 674-692.

[9] M. Boukrouche, F. Saidi, Non-isothermal lubrication problem with Tresca fluid-solid interface law. Part I. Nonlinear Analysis, Real World Applications, Vol.7(5),(2006) 1145-1166.

[10] H. Brézis, D. Kinderlehrer, and G. Stampacchia, *Sur une nouvelle formulation du problème de l'écoulement à travers une digue.* C.R.A.S. Paris Série A (287), (1978) 711-714.

[11] M. Bulícek, M. Majdoub, and J. Málek, Unsteady flows of fluids with pressure dependent viscosity in unbounded domains. Nonlinear Analysis: Real World Applications 11 (2010) 3968-3983

[12] M. Bulícek, J. Málek, and K. R. Rajagopal, Analysis of the flows of incompressible fluids with pressure dependent viscosity fulffilling $\nu(p,\cdot) \to +\infty$ as $p \to +\infty$. Czechoslovak Mathematical Journal, 59 (134) (2009), 503-528.

[13] M. Bulícek, J. Málek, and A. Świerczewska-Gwiazda, On steady flows of incompressible fluids with implicit power-law-like rheology. Advances in calculus of variations 2 (2009), no. 2, 109-136.

[14] M. Chipot, G. Michaille, Uniqueness results and monotonicity properties for the solution of some variational inequalities. Annali della Scuola Norm. Sup. Pisa, (1989) 137-166.

[15] G. Duvaut, J.L. Lions, Les Inéquations en mécanique et en physique. Dunod, Paris, (1972).

[16] M. Fang, R.P. Gilbert, Nonlinear systems arising from non-isothermal, non-Newtonian Hele-Shaw flows in the presence of body forces and sources. Mathematical and Computer Modelling, 35 (2002) 1425-1444.

[17] V. Girault, P.A. Raviart, Finite element Approximation of the Navier-Stokes Equations. Springer-Verlag, (1979).

[18] J.L. Lions, Sur quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod Gauthier-Villars, Paris (1969).

[19] A. Majda, Compressible Fluid flow and Systems of conservation laws in several space variables. Applied Mathematical Sciences 53, Springer-Verlag, 1984.

[20] A. Mikelić, R. Tapiéro, Mathematical derivation of the power law describing polymer flow through a thin slab. RAIRO Mod. Math. Anal. 29(1) (1995) 3-21

Part III

Annexe

Annexe A: Inéquations Variationnelles Elliptiques

On se donne un espace de Banach V de dual V', un opérateur non linéaire A de V dans V', un convexe K fermé de V. On s'intéresse à l'existence de $u \in K$ tel que pour f donné dans V' on ait

$$(A(u), v-u) \geq (f, v-u), \quad \forall v \in K. \qquad (IV)$$

Les théorèmes que nous allons voir assurent l'existence d'une solution de l'inéquation variationnelle (IV). Mais avant de les énoncer on donne les définitions suivantes:

Définition 1. *Un opérateur $A : V \to V'$ est dit hémicontinu si pour tous $u, v, w \in V$ la fonction*

$$\mathbb{R} \ni \lambda \longrightarrow (A(u+\lambda v), w) \in \mathbb{R}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Définition 2. *Un opérateur $A : V \to V'$ est dit monotone si*

$$\forall u, v \in V, \quad (A(u) - A(u), u-v) \geq 0.$$

Définition 3. *Un opérateur $A : V \to V'$ est dit pseudo-monotone si:*

(i) A est borné
(ii) lorsque $u_n \longrightarrow u$ dans V faible et $\limsup (A(u_n), u_n - u) \leq 0$ *alors*

$$\liminf (A(u_n), u_n - v) \geq (A(u), u-v) \quad \forall v \in V.$$

La proposition suivante est très utile pour montrer qu'un opérateur est pseudo-monotone.

Proposition 1. *Si l'opérateur A est borné, hémicontinu et monotone alors il est pseudo-monotone.*

Le premier théorème considère le cas où K est borné.

Théorème 1. [5, Th. 8.1] *On suppose que K est un ensemble convexe fermé borné non vide. Soit A un opérateur pseudo-monotone de K dans V'. Alors pour tout f donné dans V', il existe u dans K tel que l'on ait (IV).*

Maintenant si K n'est pas borné, on a le résultat suivant:

Théorème 2. [5, Th. 8.2] *Soit K un ensemble convexe fermé non borné de V. Soit A un opérateur pseudo-monotone de K dans V', et coercif dans le sens suivant:*
Il existe $v_0 \in K$ tel que,

$$\frac{(A(v), v-v_0)}{\|v\|} \to +\infty \quad si \qquad \|v\| \to +\infty, \quad v \in K.$$

Alors, pour f donné dans V', il existe $u \in K$ tel que l'on ait (IV).

Une variante de l'inéquation variationnelle (IV) est la suivante:
Étant donné A opérateur non linéaire de V dans V' et φ fonction convexe propre, trouver $u \in V$ tel que

$$(A(u) - f, v - u) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq 0 \quad \forall v \in V. \qquad (IV_1).$$

On a le théorème suivant:
Théorème 3. [5, Th. 8.5] *Soit A un opérateur pseudo-monotone de V dans V' et φ une fonction convexe propre semi-continue inférieurement. On suppose qu'il existe $v_0 \in V$ tel que $\varphi(v_0) < \infty$ et*

$$\frac{(A(v), v - v_0) + \varphi(v)}{\|v\|} \to +\infty \quad si \qquad \|v\| \to +\infty.$$

Alors, pour f donné dans V', il existe $u \in V$ solution de (IV_1).

Annexe B: Théorème de De Rham

Théorème 4. [4, Th. 2.3] *Soit Ω un ouvert borné connexe et lipschitzien de $\mathbb{R}^d$. Soit f dans $(H^{-1}(\Omega))^d$, telle que pour toute fonction $\varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^d$ vérifiant $div(\varphi) = 0$, on a $\langle f, \varphi \rangle = 0$. Alors il existe, à une constante près, une unique fonction $p \in L^2(\Omega)$ telle que $f = \nabla p$.*

Un résultat plus général est le suivant,
Théorème 5. [7] *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $f \in (\mathcal{D}'(\Omega))^d$ telle que pour tout $\varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^d$ à divergence nulle, $\langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0$, alors il existe $\pi \in \mathcal{D}'$ telle que $f = \nabla \pi$.*

On termine par une version du théorème de Rham due à Amrouche et Girault [2].

Théorème 6. [2]*Soit Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^d$, m un entier naturel, r un nombre réel tel que $1 < r < \infty$ et r' son conjugué, $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r'} = 1$. Soit $f \in W^{-m,r}(\Omega)$ telle que pour tout $\varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^d$ à divergence nulle, on a $\langle f, \varphi \rangle = 0$. Alors il existe $p \in W^{-m+1,r}(\Omega)$ telle que $f = \nabla p$. De plus si Ω est connexe alors p est unique à une constante additive près et il existe une constante positive C indépendante de f telle que*

$$\|p - p_0\|_{W^{-m+1,r}} \leq C \|f\|_{W^{-m+,r}}.$$

où p_0 est la moyenne de p sur Ω.

Annexe C: Théorème de Passe-Montagne

On désigne par E un espace de Banach doté d'une norme $\|.\|$. Soit $I : E \longrightarrow E$ une fonctionnelle sur E.

Définition 4. *On dit que $I \in C^1(E;\mathbb{R})$ satisfait la condition de Palais-Smale si toute suite $(u_n) \subset E$ telle que:*
(i) $I(u_n)$ est bornée, (ii) $I'(u_n) \to 0$,
contient une sous-suite convergente.

Théorème 7.[1] *Soit E un espace de Banach réel et $I \in C^1(E;\mathbb{R})$ une fonctionnelle satisfaisant la condition de Palais-Smale. Supposons que,*
(1) il existe des constantes ρ et α telles que $I(u) \geq \alpha$ pour tout u tel que $\|u\| = \rho$,
(2) il existe $e \in E$ avec $\|u\| > \rho$ tel que $I(e) \leq I(0)$.
Alors pour

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1]\,;E) : \gamma(0) = 0, \quad \gamma(1) = e\},$$

on a

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I\left(\gamma(t)\right) \geq \alpha$$

est une valeur critique de I.

Annexe D: Théorème du point fixe de Schauder

Si f est une application d'un ensemble E dans lui-même, on appelle point fixe de f tout élément x de E tel que $f(x) = x$. De nombreux problèmes, y compris des problèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires, peuvent être reformulés sous forme de problème d'existence d'un point fixe pour une certaine application. L'existence d'un tel point est assurée par de nombreux théorèmes comme celui du Théorème du point fixe de Schauder qui est, en fait, une extension du théorème du point fixe de Brouwer aux espaces de Banach.

Théorème 8.[3] *Soit E un espace de Banach réel et K une partie compacte et convexe de E. Si l'application $A : K \longrightarrow K$ est continue, alors elle admet un point fixe dans K.*

Annexe E: Théorème de comparaison de Sturm

On considère les deux équations suivantes:

$$\frac{d}{dx}\left(p_1(x)\frac{dy}{dx}\right) + q_1(x)y = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(p_2(x)\frac{dy}{dx}\right) + q_2(x)y = 0, \tag{2}$$

où les fonctions p_i sont dérivables sur l'intervalle $]a,b[$ et les fonctions q_i sont continues sur $[a,b]$. Les solutions de (1) et (2) sont respectivement ϕ_1 et ϕ_2. Le théorème de Sturm suivant nous donne un encadrement du zéro de la solution de l'une des équations par les zéros de la solution de l'autre.

Théorème 9.[6] *Si pour tout $x \in [a,b]$ on a, $0 < p_2(x) \leq p_1(x)$ et $q_2(x) \geq q_1(x)$. Alors ϕ_2 a un zéro entre deux zéros consécutifs de ϕ_1 sur $[a,b]$.*

Références

[1] A. Ambrosetti, P. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications; J. Funct. Anal., 14(1973) 349-381.

[2] C. Amrouche, V. Girault, Decomposition of vector spaces and application to the Stokes problem in arbitrary dimension; Czechoslovak Mathematical Journal, 44 (119) (1994) 119-140.

[3] L. C. Evans Partial differential equations; 2nd edition, Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society (2010).

[4] V. Girault, P.A. Raviart, Finite element Approximation of the Navier-Stokes Equations; Springer-Verlag, (1979).

[5] J.L. Lions, Sur quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires; Dunod Gauthier-Villars, Paris (1969).

[6] H. Reinhard, Equations différentielles, Fondements et applications; Bordas Gauthier-Villars, Paris (1982).

[7] J. Simon, Démonstration constructive d'un théorème de De G. Rham;
C. R. Acad. Sci. Paris, 316(1973) 1167-1172.

Bibliography

[1] A. Arosio, Averaged evolution equations. The Kirchhoff string and its treatment in scales of Banach spaces, proceedings of the 2nd workshop on functional-analytic methods in complex analysis, (Trieste, 1993), World Scientific, Singapore.

[2] C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa and T. F. Ma, Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type, Computers and mathematics with applications, 49 (2005) 85-93.

[3] M. Chipot, V. Valente, G. Vergara Caffarelli, Remarks on a nonlocal problem involving the Dirichlet energie, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 110(2003) 199-220.

[4] M. Chipot and B. Lovat, Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems, Nonlinear Anal., 30 (1997) 4619-4627.

[5] M. Chipot and J. F. Rodrigues, On a class of nonlocal nonlinear elliptic problems, RAIRO, Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, 26(1992) 447-467.

[6] G. Kirchhoff, Mechanik, Teubner, Leipzig (1876).

[7] J. L. Lions, On some questions in boundary value problems of mathematical physics, Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations, North-Holland Math. Stud., North-Holland, Amsterdam, 30(1978) 284-346.

[8] T. F. Ma, Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type, Nonlinear Analysis, 63(2005) 1967-1977.

[9] T. B. Benjamin, Solitary and periodic waves of a new kind, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A354 (1996) 1775-1806.

[10] L. Mays, J. Norbury, Bifurcation of positive solutions for a Neumann boundary value problem, ANZIAM J. 42(2002) 324-340.

[11] P. J. Torres, Some remarks on a Neumann boundary value problem arising in fluid dynamics, ANZIAM J. 45(2004) 327-332.

[12] C. Amrouche, V.Girault, Decomposition of vector spaces and application to the Stokes problem in arbitrary dimension. Czechoslovak Mathematical Journal, 44 (119) (1994), Praha 119-140.

[13] G. Bayada, M. Boukrouche, On a free boundary problem for Reynolds equation derived from the Stokes system with Tresca boundary conditions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 282(1), (2003) 212-231.

[14] F. Boughanim, R. Tapiéro, Derivation of the two-dimensional Carreau law for a quasi-Newtonian fluid flow through a thin slab. Applicable Analysis: An International Journal, Vol. 57(3), (1995) 243-269.

[15] M. Boukrouche, R. El Mir, Asymptotic analysis of a non-Newtonian fluid in a thin domain with Tresca law Nonlinear Analysis, Theory Methods and Applications, Vol. 59(1-2), (2004) 85-105.

[16] M. Boukrouche, R. El Mir, On the Navier-Stokes system in a thin film flow with Tresca free boundary condition and its asymptotic behavior. Bull. Math. Soc. Sc. Math. Roumanie, Tome 48 (96) (2), (2005) 139-163.

[17] M. Boukrouche, R. El Mir, Non-isothermal, non-Newtonian lubrication problem with Tresca fluid-solid law. Existence and asymptotic of weak solutions. Nonlinear Analysis, Real World Applications, Vol. 9 (2), (2008) 674-692.

[18] M. Boukrouche, F. Saidi, Non-isothermal lubrication problem with Tresca fluid-solid interface law. Part I. Nonlinear Analysis, Real World Applications, Vol.7(5),(2006) 1145-1166.

[19] M. Bulícek, M. Majdoub, and J. Málek, Unsteady flows of fluids with pressure dependent viscosity in unbounded domains. Nonlinear Analysis: Real World Applications 11 (2010) 3968-3983

[20] M. Bulícek, J. Málek, and K. R. Rajagopal, Analysis of the flows of incompressible fluids with pressure dependent viscosity fulffilling $\nu(p,\cdot) \to +\infty$ as $p \to +\infty$. Czechoslovak Mathematical Journal, 59 (134) (2009), 503-528.

[21] M. Bulícek, J. Málek, and A. Świerczewska-Gwiazda, On steady flows of incompressible fluids with implicit power-law-like rheology. Advances in calculus of variations 2 (2009), no. 2, 109-136.

[22] M. Fang, R.P. Gilbert, Nonlinear systems arising from non-isothermal, non-Newtonian Hele-Shaw flows in the presence of body forces and sources. Mathematical and Computer Modelling, 35 (2002) 1425-1444.

[23] A. Mikelić, R. Tapiéro, Mathematical derivation of the power law describing polymer flow through a thin slab. RAIRO Mod. Math. Anal. 29(1) (1995) 3-21

[24] F. J. S. A. Corrêa, On an elliptic equation involving a Kirchhoff term and a singular perturbation. Bull. Belgian Math. Soc. 14(1)(2007) 1-10.

[25] F. J. S. A. Corrêa, R. G. Nascimento, On the existence of solutions of a nonlocal elliptic equation with p-Kirchhoff-type term. Inter. J. of Math. and Mathematical Sciences, doi: 10. 1155 (2008).

[26] K. Perera, Z. Zhang, Sign changing solutions of Kirchhoff type problems via invariant sets and descent flow. J. Math. Anal. Appl. 317(1)(2006) 456-463.

[27] C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa, G. M. Figueiredo, On a class of nonlocal elliptic problems with critical growth. Diff. Eq. and Appl. 2(3)(2010) 409-417.

[28] T. F. Ma, J. E. M. Rivera, Positive solutions for a nonlinear nonlocal elliptic transmission problem. Applied Math. Letters 16(2003) 243-248.

[29] J. Ferreira, D. Pereira, M. L. Santos, Stability for a coupled system of wave equations of Kirchhoff type with nonlocal boundary conditions. Elec. J. of Diff. Eq. 85(2003) 1-17.

[30] C. O. Alves, G. M. Figueiredo, Nonlinear perturbations of a periodic Kirchhoff equation in $\mathbb{R}^n$. Nonlinear Analysis TMA 75(5)(2012) 2750-2759.